UNIVERSITAT DE BARCELONA

Departament de Física Fonamental
Universitat de Barcelona

Cesare Burali-Forti. Contributi alla Fisica-matematica del primo quarto del XX secolo

Emma Sallent Del Colombo

Barcelona, Maig de 2007

Cesare Burali-Forti. Contributi alla Fisica-matematica del primo quarto del XX secolo

Memòria de la tesi doctoral presentada per
Emma Sallent Del Colombo
per optar al grau de Doctor en Ciències Físiques

Director: Josep Manel Parra Serra
Codirector: Enrico Antonio Giannetto

Programa de Doctorat del Departament de Física Fonamenal
Mètodes Estadístics en la Física – Bienni 1996-98

Signat: Josep Manel Parra Serra Enrico Antonio Giannetto

Barcelona, Maig de 2007

Als meus pares
Olga i Josep
i al meu germà
Marc

Una traduzione goliardica di Dante in dialetto piemontese
Cant prim

I j'era giusta s'ël pi bôn d' l'età
Quand sôn vistme 'n t'un bosch afrôs e scur
E i l'hai capi d'avei fali la strà.

Per seurte da li'n mes, lô diô sicur,
L'hai dôvuië giôntè braie e gaban:
Roba da dè la testa ncôntra a 'n mur!

Ma da già ch'i sôn si dispost e san,
E i sôma a boce fërme, a sarà mei
Ch'i'v cônta'l tut da bin: cheur a la man.

Côma i l'hai fait a sperdme, va a savei:
(Ch'i fussa 'n poch cërlin?) ël fatto sta
Ch'a l'è mai vnume a col na seugn parei.

Ma 'na volta rivà a i pè 'd'ma môntà,
Fora 'd côla bôschiña 'd l'assident
Ch'a l'ha 'rvirame tant la fricassà

Guardand ën su, s'a fasia pieuva o vent,
I l'hai vist, darè al bric, spônte 'l pianeta
Ch'a fa 'ndè drit (s'a sôn nen ciôch) la gent.

Finalment a l'è stassne 'n poch pi chieta
Mia povra panssa, e i sôn dime tra 'd mi:
Si a i va na bota stôpa, e dôi di 'd dieta!

Agraïments

Són moltes les persones que han contribuït de manera decisiva a la materialització d'aquesta tesi. Segurament podria haver quedat molt millor i haver-se fet en un temps molt menor, però d'això en sóc jo l'única responsable.

Voldria agrair als meus directors, Josep Manel Parra i Enrico Antonio Giannetto, el seu temps, la seva dedicació i la gran dosi de paciència que han demostrat tenir amb mi.

Un agraïment molt especial als meus pares Olga i Josep, al meu germà Marc, als meus tiets Maria Luisa i Javier, a la Maria Antonia, als meus cosins Elisabeth i Sergi, a la Paquita i el Quimet, a l'Emilio, al Pere, al Juan; com en els brindis, als presents i als absents, que segur que els hagués fet il·lusió veure com aquest projecte es realitzava.

A José María Martín Senovilla i Teresa San Segundo.

A tots aquells que han confiat en mi, molt més enllà de les meves pròpies expectatives, Luis Navarro, Antoni Roca Rosell, Pepe Pardo i Àlvar Martínez Vidal.

Al Gruppo di Storia delle Matematiche del Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, in particolare a Clara Silvia Roero, senza la quale questa tesi non avrebbe mai visto la luce, a Livia Giacardi, a Erika Luciano.

A Pietro Nastasi con profonda stima e riconoscimento, a Luca Dell'Aglio con ammirazione, a Paolo Freguglia, a Rossana Tazzioli.

Als companys de la SCHCT i en especial dels Col·loquis, Carles Puig, Xavier Roqué, Maria Rosa Massa, Vicent Salavert, Agustí Camós, Jaume Valentines...

A Cristina Dalfó i a Toni Adam.

A José M. Pozo, sense el qual mai hagués començat a entendre l'*Espaces Courbes*, a l'Àlex, l'Àngels, el Joan, i al Jordi.

A l'Alfred Molina que a tercer de carrera, amb les seves classes de Física Quàntica, em donava raons per llevar-me al matí, a l'Enric Pérez, que m'aguanta cada dia, al Josep Llosa.

A l'Olga, la Carme, i la Mercedes.

Ai nipoti di C. Burali-Forti, Cosimo Andrea e Marylin, che mi hanno gentilmente concesso la possibilità di parlare con loro e mi hanno regalato il bellissimo ritratto che compare nella figura 9.2.

Ad Angelo Mafucci ed Alessia Massaini che sono stati di grande aiuto nelle ricerche aretine.

A Filippo Demonte Barbera che, interessato alle mie ricerche, ha avuto la gentilezza di regalarmi, con mia grande gioia, un esemplare intoso dell'*Espaces Courbes.*

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi si articola fondamentalmente in cinque capitoli (numerati dal due al sei). Il secondo capitolo è costituito dalla biografia di C. Burali-Forti, in esso si considerano gli studi fino alla laurea, l'attività didattica, la sua appartenenza alla scuola di Peano, la collaborazione al progetto del *Formulario Mathematico*, il paradosso di Burali-Forti, la libera docenza, il suo manuale di Logica matematica, la Fisica-matematica, fino ad arrivare alle onorificenze ricevute e la morte. Il capitolo contiene anche due appendici che riportano l'elenco completo delle pubblicazioni di C. Burali-Forti e la trascrizione della corrispondenza inedita con G. Vailati.

Il terzo capitolo si si occupa del dibattito per l'unificazione delle notazioni vettoriali, prendendo in considerazione l'origine della proposta di Burali-Forti e Marcolongo, lo schema di tale proposta, e il dibattito avvenuto sulle pagine della rivista l'*L'Enseignement Mathématique* dal 1908 al 1912.

Si passa poi nel quarto capitolo ad analizzare il volume *Elementi di calcolo vettoriale* del 1909 e la sua ricezione.

Nel capitolo successivo si trattano le omografie vettoriali, prendendo particolarmente in considerazione il volume *Analyse Vectorielle Générale* pubblicato nel 1912.

Il capitolo sesto costituisce il contributo più sostanziale della tesi e analizza il volume *Espaces Courbes. Critique de la Relativité* del 1924, frutto della collaborazione di C. Burali-Forti con T. Boggio. Dopo una descrizione dettagliata di quelli che consideriamo gli aspetti più rilevanti del volume, si prende in considerazione la posizione di R. Marcolongo e la ricezione del lavoro tramite le recensioni di P. Straneo e G. Y. Rainich. Si passa poi ad un breve paragrafo che considera alcuni dei contributi posteriori di T. Boggio nel secondo volume del 1930 dell'*Analisi vettoriale generale*.

Per elaborare la biografia di Cesare Burali-Forti, oltre al materiale di archivio, alla corrispondenza[1] e alle fonti primarie, abbiamo preso in considerazione numerosi articoli e libri sulla matematica italiana dell'Ottocento e del Novecento[2], altre fonti verranno citate esplicitamente.

Per quanto riguarda l'analisi dei contributi di C. Burali-Forti relativi al calcolo geometrico e ai fondamenti della matematica nella scuola di Peano si vedano i contributi di Paolo Freguglia[3].

---

[1]Cfr. Lettere di C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita. Le lettere sono state recentemente pubblicate in NASTASI, Pietro & TAZZIOLI, Rossana, (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica Applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873-1941). Quaderni P.RI.ST.EM. N.14. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2003. Le lettere di C. Burali-Forti a G. Vailati, conservate nella Biblioteca del Dipartimento di Filosofia, Università di Milano, sono qui riportate in 2.14 di questa tesi. Altri carteggi con G. Vacca, M. Pieri, L. Couturat sono editi in NASTASI, Pietro & SCIMONE, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1995, ARRIGHI, Gino, (a cura di), *Lettere a Mario Pieri (1884-1913). Quaderni P.RI.ST.EM. N.6. Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Milano, Bocconi, 1997, LUCIANO, Erika & ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *Giuseppe Peano - Louis Couturat. Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005. Non è stata per ora ritrovata la corrispondenza fra C. Burali-Forti e R. Marcolongo, alla quale Marcolongo si riferisce nei lavori appena citati e che avrebbe costituito una fonte fondamentale per chiarire alcuni momenti della biografia di Burali-Forti, come la libera docenza non conseguita, di cui parlano le biografie e della quale non è stato possibile rintracciare alcun materiale di archivio, ma anche per gettare nuova luce sullo sviluppo delle ricerche su vettori e omografie in collaborazione con R. Marcolongo. Non è stato possibile consultare in modo esaustivo neanche la parte di tale corrispondenza con R. Marcolongo, conservata nella Biblioteca del Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma «La Sapienza». Cfr. TERLIZZI, Giulia, «Fondi Archivistici. Roberto Marcolongo: un fondo di lettere e manoscritti», *Rivista di Storia della Scienza*, 1 (1993), 227-233. Non si trovano in questo fondo le lettere inviate da Burali-Forti.

[2]Cfr. AGAZZI, Evandro, «Burali-Forti, Cesare», *Dizionario biografico degli italiani*, 15 (1972), 376-381; MARCOLONGO, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185; MARCOLONGO, Roberto, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M., 1935; KENNEDY, Hubert, «Cesare Burali-Forti», *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's (1970), 593-594; la biografia di C. Burali-Forti a cura di C. S. Roero in GIACARDI, Livia & ROERO, Clara Silvia, *Bibliotheca Mathematica. Documenti per la storia della matematica nelle biblioteche torinesi*, Torino, Allemandi, 1987, 180-181; KENNEDY, Hubert, *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano. Definitive Edition*, Concord, Peremptory Publications, 2006;

[3]Cfr. BORGA, Marco, FREGUGLIA, Paolo & PALLADINO, Dario, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, Franco Angeli, 1985; FREGUGLIA, Paolo, «Cesare Burali-Forti e gli studi sul calcolo geometrico», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 173-180; FREGUGLIA, Paolo, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contribuo italiano al calcolo geometrico*, Urbino, Quattroventi, 1992; FREGUGLIA, Paolo, *Geometria e numeri. Storia, teoria elementare e applicazioni del calcolo geometrico*, Torindso, Bollati Boringhieri, 2006

Per la matematica in Italia fra le due guerre mondiali e la relatività in Italia si veda fra gli altri il volume *La matematica in Italia dopo l'Unità*[4]

[4]Cfr. Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo & Nastasi, Pietro, *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, 1998; in particolare Pastrone, Franco, «Fisica matematica e meccanica razionale». In: Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo, & Nastasi, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 381-504; Pizzocchero, Livio, «Geometria differenziale». In: Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo, & Nastasi, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 321-379; Cattani, Carlo & De Maria, Michelangelo, «Conservation Laws and Gravitation Waves in General Relativity (1915-1918)», *The Attraction of Gravitation*, Basel, Birkhäuser (1993), 63-87; Maiocchi, Roberto, «Matematici italiani di fronte alla relatività», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 247-264; Maiocchi, Roberto, *Einstein in Italia. La scienza e la filosofia italiane di fronte alla teoria della relatività*, Milano, Franco Angeli, 1985; Marazzini, Paolo, *Nuove radiazioni, quanti e relatività in Italia 1896-1925*, Pavia, La Goliardica, 1996; Guerraggio, Angelo & Nastasi, Pietro, *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1943*, Torino, Boringhieri, 1993; Israel, Giorgio & Nastasi, Pietro, *Scienza e razza nell'Italia fascista*, Bologna, Il Mulino, 1998; De Maria, Michelangelo, «Le prime reazioni alla relatività generale in Italia: la polemiche fra M. Abraham e A. Einstein», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 143-160; Gatto, Romano, *Storia di una "anomalia". Le Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'Unità d'Italia e la riforma Gentile 1860-1923*, Napoli, Fredericiana Editrice Universitaria, 2000. Per i contributi riguardanti il calcolo differenziale assoluto cfr. Dell'Aglio, Luca, «On the genesis of the concept of covariant differetiation», *Revue d'histoire des mathématiques*, 2 (1996), 215-264; Dell'Aglio, Luca, «Sul concetto di tensore in Ricci-Curbastro», *Bollettino di Storia della Scienze Matematiche*, XVII, 1 (1997), 13-49; Dell'Aglio, Luca, «On the 'semi-empirical' nature of Absolute Differential Calculus», *Archives Internationales d'Histoires des Sciences*, 51 (2001), 108-142.

Capitolo 2

Biografia

2.1 Gli studi fino alla laurea

Cesare Burali-Forti nacque ad Arezzo il 13 agosto 1861 da Cosimo[1] e Isoletta Guiducci. Dopo aver compiuto gli studi medi nel Collegio Militare di Firenze si iscrive nel 1879 all'Università di Pisa, dove si laurea in Matematica il 19 dicembre 1884, discutendo la tesi *Caratteristiche dei sistemi di coniche.* La tesi conservata nella Biblioteca Universitaria di Pisa[2], consta di 50 pagine autografe ed è firmata da Burali-Forti; è suddivisa in 5 paragrafi intitolati:

I. Definizioni, rappresentazione del sistema, coniche singolari

II. Caratteristiche delle coniche singolari. Modi di degenerazione

III. Riduzione della condizione Ψ alla forma invariantiva. Condizione Θ

IV. Determinazione del numero I delle coniche che soddisfano alla condizione $\Phi = 0$. Caratteristiche μ e ν del sistema

V. Teoremi di Chasles. Applicazioni

Oltre al certificato di laurea si conservano, nell'Archivio di Stato di Pisa, i documenti relativi alla domanda di passaggio dal primo al secondo anno della

[1]Segretario Capo dell'Amministrazione Provinciale di Arezzo e cavaliere della Corona d'Italia (Nomina del 24 gennaio 1889) fu «Uomo dai mille interessi, dal versatile ingegno, [...] si occupò di discipline giuridiche e amministrative, fu studioso di storia locale, pittore, ma in particolar modo appassionato cultore della musica che diventò la sua attività prediletta». Cfr. Massaini, Alessia, *Un musicista aretino: Cosimo Burali-Forti (1834-1905). Studio critico e catalogo tematico,* Tesi di laurea: relatore Piperno Franco, Università di Firenze, Facoltà di Lettere e Filosofia, 1998/1999.

[2]Fascicolo TESI 5421.

facoltà Fisico-matematica (13 novembre 1880), dell'ammissione come uditore al terzo anno, non avendo ancora dato gli esami di Fisica e di Chimica (7 novembre 1881) e di passaggio dal terzo al quarto anno (Novembre 1882).[3]

A Pisa Burali-Forti, segue i corsi di Analisi infinitesimale ed Analisi superiore tenuti da Ulisse Dini (1845-1918) e le lezioni di Meccanica razionale, Meccanica celeste e Fisica-matematica di Enrico Betti (1823-1892). Alcune delle tesine discusse da Burali-Forti nel corso dell'esame di laurea riguardano alcuni problemi fisico-matematici studiati dal Betti.

2.2 L'attività didattica

Dopo la laurea C. Burali-Forti passa ad insegnare nella Scuola Tecnica di Augusta, in Sicilia nel 1885. Il settimanale aretino «La Provincia di Arezzo» del 29 agosto 1886 riporta:

> «NOMINA AD INSEGNANTE. Il dott. Cesare Burali-Forti, figlio dell'egregio Segretario Capo della nostra Provincia, con recente decreto è stato nominato Professore Reggente di matematiche nella Regia Scuola Tecnica di Augusta in Provincia di Siracusa, coll'annuo stipendio di lire 1728. Il dott. Cesare Burali-Forti si è sempre distinto nella carriera degli studi e come alunno del Collegio Militare e come scolare dell'Università di Pisa, ed ha pubblicato pregiati scritti nelle discipline che con grande amore coltiva. Siamo persuasi che riuscirà un bravo insegnante da fare onore alla nostra città.»[4]

Nel 1887 vince il concorso a professore straordinario di Geometria presso la Reale Accademia di Artiglieria e Genio di Torino. Il 29 ottobre dello stesso anno sposa Gemma Viviani e da questa unione nascerà il 9 Agosto 1889 il figlio Umberto.

Burali-Forti lavorerà all'Accademia Militare per tutta la vita. Nominato professore straordinario il 1° settembre 1887, diventa professore aggiunto di prima classe il 30 giugno 1900, titolare di prima classe il 30 ottobre 1902 sulla cattedra di Geometria proiettiva, ordinario nel 1906 e poi unico ordinario apprezzatissimo fra i docenti non militari.[5] Tiene contemporanea-

---

[3] Cfr. Archivio di Stato di Pisa. Fascicolo personale dello studente Cesare Burali-Forti.

[4] Ringrazio la Dr. Alessia Massaini per avermi segnalato questo articolo.

[5] Cfr. Annuario Militare del Regno d'Italia. Scuola di Applicazione e Arma. Anni: 1887-1930.

mente l'insegnamento di matematica presso l'Istituto Tecnico Sommeiller di Torino.[6]

Nel suo necrologio Marcolongo ricorda che fu per oltre 43 anni

> «il maestro di moltissime generazioni di ufficiali delle Armi dotte che affettuosamente ricordano il burbero ma benefico professore ed hanno studiato le sue eleganti e ricche lezioni di Geometria analitico-proiettiva.»[7]

Ne sottolinea anche l'adempimento «delle non lievi cure dell'insegnamento con uno scrupolo e una solerzia inarrivabili»[8]; la preparazione di numerosi libri di testo per le scuole «improntati e vivificati da pensieri originali, chiari, rigorosi»[9].

Burali-Forti pubblica infatti numerosi libri di testo per le scuole.

Nel 1897 scrive le *Lezioni di Aritmetica Pratica*, e nel 1898, pubblica da solo gli *Elementi di algebra* e, insieme ad Angelo Ramorino (1869-?), i testi *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari* ed *Elementi di Aritmetica Razionale.* In questi volumi Burali adotta la teoria dei fondamenti dell'aritmetica esposta da Peano nel *Formulario*, come riferisce lo stesso Peano

> «La théorie des principes de l'Arithmétique, que nous venons d'exposer, a été adoptée dans plusieurs traités didactiques: P. Gazzaniga, Libro di Aritmetica e di Algebra elementare, Padova, a. 1896, 2a ediz. a. 1897, 3a ediz. a. 1900. C. Burali-Forti e A. Ramorino, Aritmetica, Torino, 1898.»[10]

Il fatto di lavorare all'Accademia Militare lo pone in una posizione diversa rispetto ai docenti universitari. Per esempio nel 1912 non riesce a partecipare al Congresso di Cambridge, nonostante abbia presentato una comunicazio-

[6]Nel 1906 risulta ancora professore tale Istituto. Cfr. Lettera di C. Burali-Forti a G. Vailati del 2.05.1906, Appendice 2.11.

[7]Cfr. Marcolongo, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185, 182.

[8]Ibidem nota precedente.

[9]Ibidem nota precedente.

[10]Cfr. PEANO, Giuseppe, *Formulaire Mathématique*, t. 4, 1902-03, 36 e Luciano, Erika, «Aritmetica e storia nei libri di testo della Scuola di Peano», *Da Casati a Gentile, Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia.* A cura di Livia Giacardi, Livorno, Agorà (2006), 269-303.

ne[11], perché nel mese di agosto deve tenere i suoi corsi all'Accademia, come egli riferisce nalla lettera spedita da Torino il 22.3.1912 a Bertrand Russell.[12]

Cesare Burali-Forti pubblica inoltre i seguenti trattati *Applicazioni della Geometria descrittiva e proiettiva: lezioni per gli allievi della R. Accademia Militare*, Torino, Candeletti, 1890, *Corso di Geometria metrico-proiettiva*, Torino, Bocca, 1904, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva per gli allievi della R. Acc. Militare*, Torino, Petrini, 1912, *Esercizi di Geometria analitico-proiettiva per gli allievi della R. Accad. Militare*, Torino, Tip. Fagnone, 1914, *Geometria descrittiva*, Torino, Lattes, 1921.

Il 13 novembre 1887 entra nel corpo docente dell'Accademia Militare anche Giuseppe Peano che terrà l'insegnamento di Analisi Matematica fino al 1901.[13] Anche Mario Pieri è assunto come professore nell'Accademia lo stesso anno e resterà fino al 1 maggio del 1900, quando si trasferirà in Sicilia, essendo risultato vincitore del concorso a professore di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di Catania. Peano, nel 1890 vince il concorso alla cattedra di Calcolo infinitesimale all'Università di Torino e il suo impegno nella realizzazione del *Formulario Mathematico*, lo induce a dimettersi dall'incarico di insegnamento presso l'Accademia Militare come egli riferisce ad

[11]Cfr. BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les lois générales de l'algorithme des symboles de fonction et d'operation», *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge 22-28 August 1912*, 2 (1913), 480-491.

[12]«Monsieur et cher confrère, Je suis fort honoré de votre requête d'une communication que je devrais faire à la Section philosophique au congrès de Cambridge. Dès longtemps j'ai abandonné les études de philosophie mathématique pour me donner entièrement à la nouvelle partie du calcul vectoriel qui, en un laps de temps assez court, c'est étendu bien beaucoup plus de ce que j'osais espérer. Les études précédentes de logique m'ont étés fort utiles pour établir les notations vectorielles. Quelque notice du procédé logique qui a servi de fondement aux notations nouvelles, on la trouvera dans les notes du 1re volume de la nouvelle publication *Analyse vectorielle générale*, publication que je retiens être prête avant le congrès. (En collaboration avec Marcolongo). Croyez vous qu'une communication relative à les lois logique-formelles d'un *système général* de notations puisse intéresser les congressistes de la Section Philosophique? Si vous le croyez je peux vous promettre une communication dont je vais, dans peu, vous indiquer le titre exacte. Elle n'aura point l'importance que vous désiriez et que je voudrais qu'elle eût; mais elle aura le seul mérite de mettre en évidence combien soient simples et exactes les notations de votre grand Hamilton, dont je suis ardent admirateur. Je dois Vous avertir que je ne pourrait presque certainement me rendre au congrès, parce que dans le mois d'Août j'aurais encore les leçons a l'Académie Militaire à cause de l'accélération des cours. Veuillez agréer tous mes remerciements et mes salutations distinguées avec l'assurance de ma plus haute estime. Cesare Burali-Forti.» Fonte: McMaster University Library, Hamilton, Ontario, Bracers 0000498.

[13]Presso l'Archivio Storico dell'Accademia Militare si è ritrovata la richiesta di «collocamento a riposo per sua domanda di infermità comprovata, del 16 maggio 1901.»

F. Amodeo nella cartolina del 22 febbraio 1901.[14]

2.3 La Scuola di Peano

Com osserva C. S. Roero:

> «Il periodo compreso fra il 1880 e il 1900 si può considerare a giusto titolo come l'età aurea della matematica torinese, quella nella quale salgono alla ribalta internazionale tre punte di diamante della matematica italiana: Giuseppe Peano (1858-1932), Corrado Segre (1863-1924) e Vito Volterra (1860-1940). I primi due svolgono a Torino tutta la loro attività e si impegnano a dar vita ad una scuola di allievi, mentre il terzo vi soggiorna per sette anni e dalla nuova sede di Roma, dove si trasferirà nel dicembre del 1900, continuerà a mantenere i contatti con molti colleghi torinesi, a cui lo legano comunanza di studi e obiettivi politico-culturali.»[15]

In particolare in questo periodo Peano va progressivamente assegnando un ruolo sempre più importante alla Logica matematica: quello cioè di esprimere in forma simbolica, per via assiomatica, tutte le teorie matematiche classiche e con il progetto grandioso del *Formulario Mathematico* egli organizza a Torino un gruppo di allievi, assistenti, colleghi d'Università o di Accademia militare, che collaborano attivamente a tale progetto. Anche la *Rivista di Matematica* che Peano fonda nel 1891 con finalità didattiche, aiuterà a promuovere l'impresa.

Fra gli assistenti, allievi e collaboratori di Peano a Torino possiamo citare Audisio Fausta (1906-1990), Bersano Carlo (1898-1975), Bettazzi Rodolfo (1861-1941), Boccalatte Cesarina (1901-1991), Boggio Tommaso (1877-1963), Borio Agostino (1873-1962), Bottasso Matteo (1878-1918), Burali-Forti Cesare (1861-1931), Cassina Ugo (1897-1964), Castellano Filiberto (1860-1919), Chinaglia Piera (1898-?), Chionio Fiorenzo (1886-?), Cibrario Maria (1905-1992), Comi Tersilla Tiziana (1891-1961), Della Casa Luciano (1885-1957),

[14]Cfr. PALLADINO, Franco, (a cura di), *Le corrispondenze epistolari tra Peano e Cesàro e Peano e Amodeo. Quaderni P.RI.ST.EM. N.13. Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Salerno, Bocconi, 2000.

[15]Cfr. *Matematica* in ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1898. Tomo primo. Ricerca, Insegnamento, Collezioni scientifiche*, Torino, Centro di Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti X, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999, 300.

De Stefanis Maria (1893-1979), Fano Gino (1871-1952), Ferrero Clementina (1888-?), Frisone Rosetta (1888-?), Gramegna Maria (1887-1915), Mago Vincenzo (1887-1920), Mori Breda Gilda (?-?), Nassò Marco (1864-1920), Novarese Enrico (1858-1892), Padoa Alessandro (1868-1937), Pagliero Giuliano (1873-1949), Pensa Angelo (1875-1960), Peyroleri Margherita (1887-?), Pieri Mario (1860-1913), Pizzardo Tina (1903-1989), Quarra Paolina (1889-?), Ramorino Angelo (1869-?), Tanturri Alberto (1877-1924), Vacca Giovanni (1872-1953), Vailati Giovanni (1863-1909), Vesin Virginia (1887-?), Viglezio Elisa (1894-1984), Viriglio Luigia (1879-1955), Zavagna Ireneo (1894-1958). Peano presenta le note di alcuni suoi allievi all'Accademia delle Scienze di Torino.[16]

Molti esponenti della Scuola di Peano, fra i quali, in prima linea Burali-Forti, Alessandro Padoa, Giovanni Vacca e Giovanni Vailati, partecipano attivamente all'Associazione Mathesis che era stata fondata a Torino nel 1895-96 da Rodolfo Bettazzi, Aurelio Lugli e Francesco Giudice. Nel biennio 1898-1900 Burali-Forti è eletto membro del Consiglio direttivo della Mathesis insieme a Alberto Brambilla, Enrico De Amicis, Antonio De Zolt, Giovanni Frattini, Paolo Gazzaniga, Giulio Lazzeri, Francesco Panizza, Virginio Retali, Giuseppe Sforza, con Segretario Filiberto Castellano, Presidente Rodolfo Bettazzi e Vicepresidente Francesco Giudice. In preparazione al I Congresso della Mathesis che si tiene a Torino dal 9 al 14 settembre 1898 Burali-Forti presenta una proposta di soluzione relativa alla questione XI che riguardava la trattazione della teoria delle proporzioni.[17] Nel biennio 1902-1904 Cesare Burali-Forti è eletto Vicepresidente della Mathesis e nel successivo biennio 1904-1906 sarà nuovamente membro del Consiglio Direttivo dell'Associazione.

Come allievo della scuola di Peano C. Burali-Forti partecipa al Primo Congresso Internazionale dei Matematici di Zurigo del 1897 e al Congresso Internazionale di Filosofia di Parigi del 1900.[18]

---

[16]Cfr. ROERO, Clara Silvia, «Alcune iniziative nella storia della Facoltà di Scienze MFN di Torino per promuovere la cultura matematica fra gli insegnanti: le Scuole di Magistero, l'operato di Peano, il Centro di Studi Metodologici», In *Associazione Subalpina Mathesis. Conferenze e Seminari 1998-1999*, Torino, M.S.Litografia (1999), 188-211.

[17]Cfr. BURALI-FORTI, Cesare, «Sulla questione XI», *Bollettino dell'Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle Scuole Medie*, 2 (1897-1898), 126-129.

[18]Cfr. BURALI-FORTI, Cesare, «Postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky», *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897, Leipzig, Teubner*, 1 (1897), 247-250 e BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les différentes méthodes logiques pour la définition du nombre réel», *Congrès international de Philosophie, Paris 1900, Logique et histoire des sciences,* Paris, A. Colin, III (1901), 288-308.

2.4 Il *Formulario Mathematico* di G. Peano

Il progetto più ambizioso cui Peano dedica tutte le sue energie a partire dal 1891 è quello del *Formulario*, che per tutta la vita continuerà a riconoscere come l'opera più importante da lui compiuta: una grande enciclopedia matematica sotto forma simbolica completa. Nella versione finale del 1908 il *Formulario* raccoglie oltre quattromila proposizioni scritte in simboli, con l'enunciato esplicito delle condizioni di validità e la loro dimostrazione. Sono citate le fonti e i passi originali e si trovano notizie biografiche e bibliografiche dei matematici autori delle proposizioni richiamate, come pure la storia dei concetti fondamentali e l'etimologia di oltre cinquecento vocaboli di logica e di matematica. Alla realizzazione del *Formulario* si dedicano in molti con entusiasmo, redigendo interi capitoli. Giovanni Vailati redige la parte sulla logica e le indicazioni storiche, Filiberto Castellano le operazioni algebriche, Cesare Burali-Forti l'aritmetica e la teoria delle grandezze, Rodolfo Bettazzi il capitolo sui limiti, Gino Fano la teoria dei numeri algebrici, Francesco Giudice la parte sulle serie e Giulio Vivanti la teoria degli insiemi. A questi si affiancano successivamente Giovanni Vacca per le notizie storiche, Giuliano Pagliero per la teoria delle curve, Alessandro Padoa per le proposizioni di aritmetica e teoria dei numeri. Molti altri collaborano invece presentando aggiunte, correzioni o modifiche, riportate nelle edizioni successive, come Tommaso Boggio, Corrado Ciamberlini, Angelo Ramorino, Mineo Chini e, fra gli stranieri, Louis Couturat, Gustav Eneström e Otto Stolz.[19]

Burali-Forti collaborò alle diverse e successive edizioni del *Formulario Mathematico*[20] e fu tra i primi a volgarizzare e chiarire i concetti ed i metodi della logica peaniana e ad apportarvi il suo acuto spirito critico nell'analisi di alcuni concetti fondamentali.[21]

---

[19]Cfr. ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *Le Riviste di Giuseppe Peano*, Giuseppe Peano, geniale matematico, onorevole maestro. Maestri dell'Ateneo torinese dal Settecento al Novecento a cura di Renata Allio, Torino Centro Studi di Storia dell'università, 2004115-144.

[20]Per l'elaborazione di questo paragrafo è stata fondamentale la voce *Burali-Forti* tratta dalla tesi di laurea della Dr. Natalia Nervo. Cfr. NERVO, Natalia, *La Scuola di Peano, allievi e collaboratori. Tesi di laurea: relatore* ROERO *Clara Silvia*, Universita' di Torino, Dipartimento di Matematica, Novembre 1999.

[21]In questo paragrafo abbiamo preferito riportare le immagini relative alle proposizioni del *Formulario* per la difficoltà di trascrivere nel linguaggio moderno i simboli utilizzati. Tali immagini sono tratte CD-rom ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *L'Opera omnia di Giuseppe Peano*, CD-ROM N. 3, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2002.

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

[illegible]

" RIVISTA DI MATEMATICA "

TOME I

I. [illegible]
II. [illegible]
III. Arithmétique
IV. [illegible]
V. [illegible]
VI. [illegible]
VII. [illegible]
VIII. [illegible]
IX. [illegible]

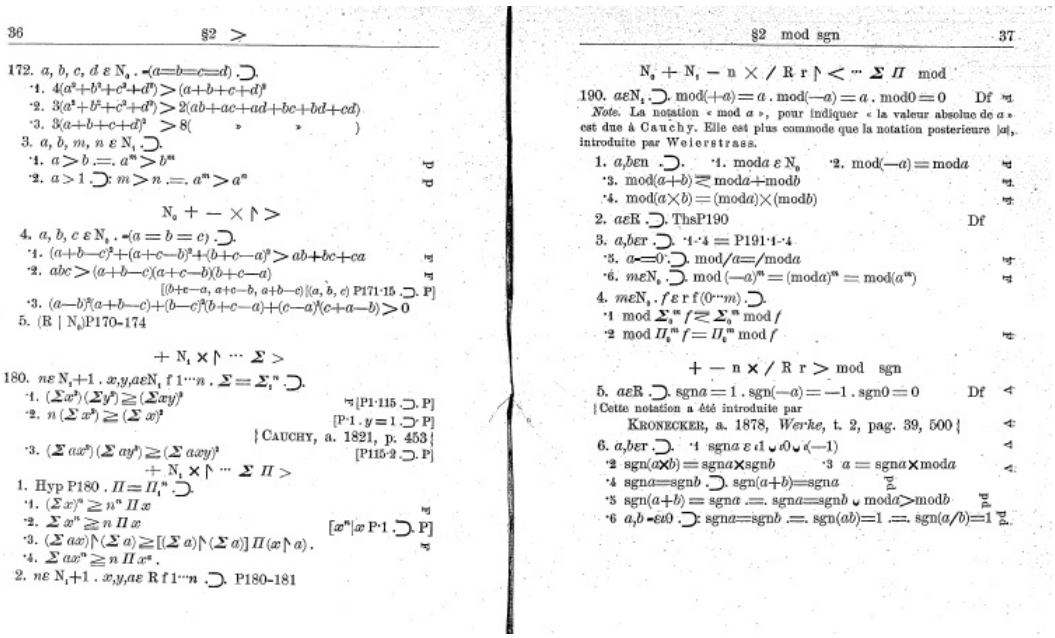
[illegible]

Peano indica nella prefazione del Tomo 2 del 1898 che il capitolo III è stato realizzato in collaborazione con Burali-Forti.

Sigles des collaborateurs.

Ch = CHINI, *Form. d. Math.*, t. II.
F = Formulaire de Mathématiques t. I, parties II et III. Ces parties ont été rédigées et complétées en collaboration; y prirent part, notamment à la II partie, M. F. CASTELLANO, et à la III M. C. BURALI-FORTI.
P = PEANO, *Arithmetices principia*, a. 1889.
P = » *Sul concetto di numero*, R. d. M. a. 1891.
Pd = PADOA, *Form. d. Math.*, t. II.
V = VACCA, » » t. II.

Egli riporta minuziosamente i contributi dei diversi collaboratori con i simboli relativi, sul margine destro, accanto alla corrispondente proposizione:


36 §2 $>$

172. $a, b, c, d \,\varepsilon\, N_1 \,.\, -(a=b=c=d) \,.\supset.$
·1. $4(a^2+b^2+c^2+d^2) > (a+b+c+d)^2$
·2. $3(a^2+b^2+c^2+d^2) > 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$
·3. $3(a+b+c+d)^2 > 8($ » » $)$
3. $a, b, m, n \,\varepsilon\, N_1 \,.\supset.$
·1. $a > b \,.=.\, a^m > b^m$
·2. $a > 1 \,.\supset:\, m > n \,.=.\, a^m > a^n$

$N_0 + - \times \upharpoonright >$

4. $a, b, c \,\varepsilon\, N_1 \,.\, -(a = b = c) \,.\supset.$
·1. $(a+b-c)^2+(a+c-b)^2+(b+c-a)^2 > ab+bc+ca$
·2. $abc > (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$
[$(b+c-a,\ a+c-b,\ a+b-c) | (a, b, c)$ P171·15 $.\supset.$ P]
·3. $(a-b)^2(a+b-c)+(b-c)^2(b+c-a)+(c-a)^2(c+a-b) > 0$
5. (R | N_0)P170-174

$+ \ N_1 \times \upharpoonright \cdots \ \Sigma >$

180. $n \varepsilon N_1+1 \,.\, x,y,a \varepsilon N_1 \,f\, 1\cdots n \,.\, \Sigma = \Sigma_1^n \,.\supset.$
·1. $(\Sigma x^2)(\Sigma y^2) \geqq (\Sigma xy)^2$ [P1·115 $.\supset.$ P]
·2. $n(\Sigma x^2) \geqq (\Sigma x)^2$ [P·1 . $y=1$ $.\supset.$ P]
| CAUCHY, a. 1821, p. 453 |
·3. $(\Sigma ax^2)(\Sigma ay^2) \geqq (\Sigma axy)^2$ [P115·2 $.\supset.$ P]

$+ \ N_1 \times \upharpoonright \cdots \ \Sigma \ \Pi >$

1. Hyp P180 . $\Pi = \Pi_1^n \,.\supset.$
·1. $(\Sigma x)^n \geqq n^n \,\Pi x$
·2. $\Sigma x^n \geqq n \,\Pi x$ [$x^n | x$ P·1 $.\supset.$ P]
·3. $(\Sigma ax) \upharpoonright (\Sigma a) \geqq [(\Sigma a) \upharpoonright (\Sigma a)] \,\Pi (x \upharpoonright a)$.
·4. $\Sigma ax^n \geqq n \,\Pi x^a$.
2. $n \varepsilon N_1+1 \,.\, x,y,a \varepsilon R \,f\, 1\cdots n \,.\supset.$ P180-181

§2 mod sgn 37

$N_0 + N_1 - n \times / R \ r \upharpoonright < \cdots \ \Sigma \ \Pi$ mod

190. $a \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \mathrm{mod}(+a) = a \,.\, \mathrm{mod}(-a) = a \,.\, \mathrm{mod}0 = 0$ Df
Note. La notation « mod a », pour indiquer « la valeur absolue de a » est due à Cauchy. Elle est plus commode que la notation posterieure $|a|$, introduite par Weierstrass.
1. $a,b \varepsilon n \,.\supset.$ ·1. $\mathrm{mod}a \,\varepsilon\, N_0$ ·2. $\mathrm{mod}(-a) = \mathrm{mod}a$
·3. $\mathrm{mod}(a+b) \leqq \mathrm{mod}a + \mathrm{mod}b$
·4. $\mathrm{mod}(a \times b) = (\mathrm{mod}a) \times (\mathrm{mod}b)$
2. $a \varepsilon R \,.\supset.$ ThsP190 Df
3. $a,b \varepsilon r \,.\supset.$ ·1-·4 = P191·1-·4
·5. $a -= 0 \,.\supset.\, \mathrm{mod}/a = /\mathrm{mod}a$
·6. $m \varepsilon N_1 \,.\supset.\, \mathrm{mod}(-a)^m = (\mathrm{mod}a)^m = \mathrm{mod}(a^m)$
4. $m \varepsilon N_1 \,.\, f \varepsilon r \,f\, (0\cdots m) \,.\supset.$
·1 $\mathrm{mod}\, \Sigma_0^m f \leqq \Sigma_0^m \mathrm{mod} f$
·2 $\mathrm{mod}\, \Pi_0^m f = \Pi_0^m \mathrm{mod} f$

$+ - n \times / R \ r >$ mod sgn

5. $a \varepsilon R \,.\supset.\, \mathrm{sgn}a = 1 \,.\, \mathrm{sgn}(-a) = -1 \,.\, \mathrm{sgn}0 = 0$ Df
| Cette notation a été introduite par KRONECKER, a. 1878, *Werke*, t. 2, pag. 39, 500 |
6. $a,b \varepsilon r \,.\supset.$ ·1 $\mathrm{sgn}a \,\varepsilon\, \iota 1 \cup \iota 0 \cup \iota(-1)$
·2 $\mathrm{sgn}(a \times b) = \mathrm{sgn}a \times \mathrm{sgn}b$ ·3 $a = \mathrm{sgn}a \times \mathrm{mod}a$
·4 $\mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b \,.\supset.\, \mathrm{sgn}(a+b) = \mathrm{sgn}a$
·5 $\mathrm{sgn}(a+b) = \mathrm{sgn}a \,.=.\, \mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b \cup \mathrm{mod}a > \mathrm{mod}b$
·6 $a,b - \varepsilon \iota 0 \,.\supset:\, \mathrm{sgn}a = \mathrm{sgn}b \,.=.\, \mathrm{sgn}(ab) = 1 \,.=.\, \mathrm{sgn}(a/b) = 1$

Riportiamo alcuni passi di Peano in cui questi contributi vengono messi in luce:

> «Da alcuni anni una Società sta pubblicando il *Formulaire de Mathématiques*, la cui "Introduction" apparve nel 1894; e il primo tomo, cominciato nel 1892, terminò nel 1895. [...] Vi collaborarono i signori VAILATI, CASTELLANO, BURALI, GIUDICE, VIVANTI, BETTAZZI, FANO, oltre ad altri che inviarono aggiunte e correzioni.»[22]

> «MM. C. Burali, F. Castellano, M. Chini, A. Padoa, G. Vacca, G. Vailati, G. Vivanti et plusieurs autres cités dans le publications précédentes, ont contribué à la reduction en symboles de ces thèories dans leurs éditions successives.»[23]

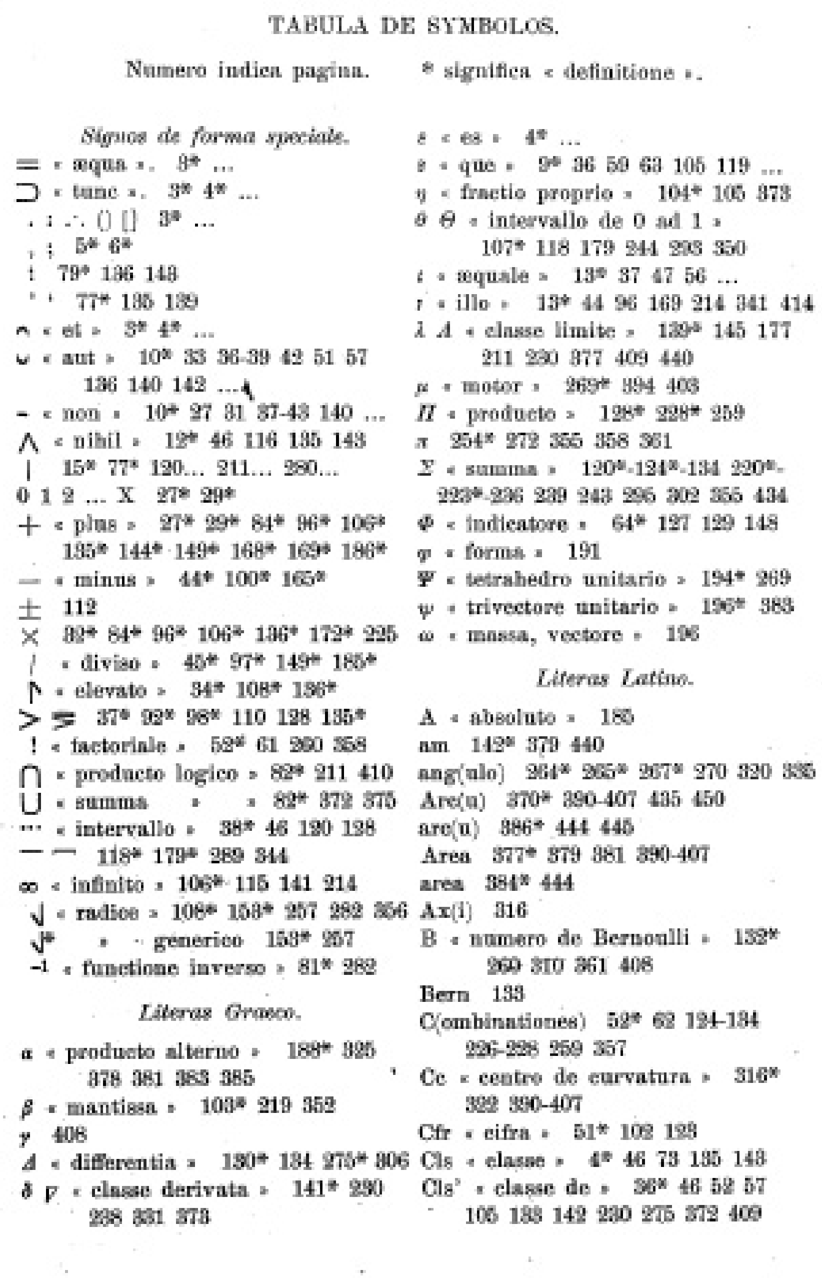
> «Nous avons essayé de rèunir en un seul volume les propositions ècrites entièrement en symboles, et que nous appelons -formules-. Ainsi s'est formé le t. 1 du Formulaire, publié en 1892-1895. MM. F. CASTELLANO, G. VAILATI, C. BURALI-FORTI, R. BETTAZZI, G. VIVANTI, F. GIUDICE, G. FANO y ont collaboré, ou ont réduit en symboles des nouvelles thèories.»[24]

[22]Cfr. PEANO, Giuseppe, «Studii di Logica matematica», *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, XXXII, (1896-97), 566.
[23]Cfr. PEANO, Giuseppe, *Formulaire de Mathématiques*, t. 2, 1899, N° 3, Préface.
[24]Cfr. PEANO, Giuseppe, *Formulaire de Mathématiques*, t. 3, 1901, Préface, 6-7.

«Le nouveau tome 4, ou -éditio de l'a. 1902-03 du Formulaire-, contient: 1° -Les théories fondamentales contenues dans le t. 3, à l'exception des théories secondaires,
2° -Le nouvelles théories et les additions aux théories précédentes,
3° -Les additions apportées pendant lìimpression du Formulaire, par MM: ARBICONE A., Ovada; BEMAN W., Michigan; BOGGIO T., Torino; BORIO A., Id.; BURALI-FORTI C., Id.; CANTONI A., Viadana; CASTELLANO F., Torino; COUTURAT L., Paris; D'ARCAIS F., Padova; FERRARI F., Firenze; GIUDICE F., Genova; INVREA F., Chieri; KORSELAT A., Plauen; MORERA G., Torino; NASSÒ M., Id.; PADOA A., Roma; PIERI M., Catania; RAMORINO A., Torino; RIUS Y CASAS J., Zaragoza; SEVERI F., Bologna; VACCA G., Genova; ZIGNANO I., Id.»[25]

«Formulaire Mathématique, tome 1, a. 1895, es composito in collaboratione cum professores F. CASTELLANO in Torino (formulas de Algebra); G. VAILATI in Roma (indicationes historico de Logica Mathematica); C. BURALI-FORTI in Torino (formulas de Arithmetica et theoria de magnitudines); G. VIVANTI (theoria de classes); R. BETTAZZI (limites); F. GIUDICE (serie); G. FANO (numeros algebrico).»[26]

[25]Cfr. PEANO, Giuseppe, *Formulaire Mathématique*, t. 4, 1902-03, Préface, 7-8.
[26]Cfr. PEANO, Giuseppe, *Formulario Mathematico*, t. 5, 1908, Praefatione, 8-9.



TABULA DE SYMBOLOS.

Numero indica pagina. * significa « definitione ».

Signos de forma speciale.

= « æqua ». 3* ...
⊃ « tunc ». 3* 4* ...
. : .·. () [] 3* ...
, ; 5* 6*
; 79* 136 148
' ' 77* 135 139
⌒ « et » 3* 4* ...
∪ « aut » 10* 33 36-39 42 51 57 136 140 142 ...
− « non » 10* 27 31 37-43 140 ...
Λ « nihil » 12* 46 116 135 143
| 15* 77* 120... 211... 280...
0 1 2 ... X 27* 29*
+ « plus » 27* 29* 84* 96* 106* 135* 144* 149* 168* 169* 186*
— « minus » 44* 100* 165*
± 112
× 82* 84* 96* 106* 136* 172* 225
/ « diviso » 45* 97* 149* 185*
↑ « elevato » 34* 108* 136*
> ≥ 37* 92* 98* 110 128 135*
! « factoriale » 52* 61 260 358
⋂ « producto logico » 82* 211 410
⋃ « summa » » 82* 372 375
··· « intervallo » 38* 46 120 128
— ‾ 118* 179* 289 344
∞ « infinito » 106* 115 141 214
√ « radice » 108* 158* 257 282 356
√* » generico 158* 257
−1 « functione inverso » 81* 282

Literas Graeco.

α « producto alterno » 188* 325 378 381 383 385
β « mantissa » 103* 219 352
γ 408
Δ « differentia » 130* 134 275* 306
δ ϝ « classe derivata » 141* 230 238 331 373
ε « es » 4* ...
ɜ « que » 9* 36 59 63 105 119 ...
η « fractio proprio » 104* 105 373
θ Θ « intervallo de 0 ad 1 » 107* 118 179 244 293 350
ι « æquale » 13* 37 47 56 ...
ɩ « illo » 13* 44 96 169 214 341 414
λ Λ « classe limite » 139* 145 177 211 230 377 409 440
μ « motor » 269* 394 403
Π « producto » 128* 228* 259
π 254* 272 355 358 361
Σ « summa » 120*-124*-134 220*-223*-236 239 243 295 302 355 434
Φ « indicatore » 64* 127 129 148
φ « forma » 191
Ψ « tetrahedro unitario » 194* 269
ψ « trivectore unitario » 196* 383
ω « massa, vectore » 196

Literas Latino.

A « absoluto » 185
am 142* 379 440
ang(ulo) 264* 265* 267* 270 320 335
Arc(u) 370* 390-407 435 450
arc(u) 386* 444 445
Area 377* 379 381 390-407
area 384* 444
Ax(i) 316
B « numero de Bernoulli » 132* 269 310 361 408
Bern 133
C(ombinationes) 52* 62 124-134 226-228 259 357
Cc « centro de curvatura » 316* 322 390-407
Cfr « cifra » 51* 102 123
Cls « classe » 4* 46 73 135 143
Cls' « classe de » 36* 46 52 57 105 133 142 230 275 372 409

Cesare Burali-Forti contribuì, come abbiamo detto, alla stesura del *Formulario*, nelle sue varie edizioni, introducendo alcune proposizioni: nell'edizione del 1908, nel capitolo sull'algebra, al paragrafo relativo al «producto logico» ($\bigcap$) e alla «summa logica» ($\bigcup$) egli presenta le seguenti proposizioni:

§5 $\bigcap$ $\bigcup$

❋ 1. $u, v \varepsilon \mathrm{Cls'Cls} \;.\supset.$

·0 $\bigcap u = y \ni \{x \varepsilon u \;.\supset_x.\; y \varepsilon x\} \;.\; \bigcup u = x \ni \exists \{u \frown y \ni (x \varepsilon y)\}$ Df

Si u es classe de classe, tunc $\bigcap u$, lege « parte commune des u » vel « producto logico des u » indica omni objecto pertinente ad omni classe de systema u.

$\bigcup u$, lege « universo des u » vel « summa des u » indica objectos pertinente ad aliquo classe u.

P·1 es analogo ad syllogismo.

·1 $x \varepsilon a \,.\, a \varepsilon u \;.\supset.\; x \varepsilon \bigcap u$

·2 $\bigcup(u \smile v) = \bigcap u \smile \bigcap v$ Distrib $(\bigcup, \smile)$

·3 $\bigcap(u \smile v) = \bigcap u \frown \bigcap v$

·4 $u \supset v \;.\supset.\; \bigcup u \supset \bigcup v \;.\; \bigcap v \supset \bigcap u$

·5 $\bigcup(u \frown v) \supset \bigcup u \frown \bigcup v$

·6 $\bigcap u \smile \bigcap v \supset \bigcap(u \frown v)$

{·2-·6 C. Burali-Forti, MA. t.48}

·7 $u, v \varepsilon \mathrm{Cls} \;.\supset.\; \bigcup\{[(x;y) \mid x'u] \mid y'v\} = (u{:}v)$

Nos considera systema $x;y$. Nos varia x in classe u; $(x;y) \mid x'u$ repraesenta classe de systema. Nos varia y in classe v; $[(x;y) \mid x'u] \mid y'v$ repraesenta classe de classe de systema. Suo universo vale $(u{:}v)$.

La seconda proposizione era già stata introdotta da Burali-Forti nella seconda edizione (1897) del *Formulario* con un simbolismo leggermente differente:

464. $\frown'(u \smile v) = (\frown' u) \frown (\frown' v)$.

[P462 . $\supset$. $\frown'(u \smile v) = \overline{x\varepsilon}\,(y \varepsilon u \smile v \,.\supset_y.\, x \varepsilon y)$

P202 . $\supset$. » » $(y \varepsilon u \,.\smile.\, y \varepsilon v \,.\supset_y.\, x \varepsilon y)$

P213 . $\supset$. » » $(y \varepsilon u \,.\supset_y.\, x \varepsilon y :\smile: y \varepsilon v \,.\supset_y.\, x \varepsilon y)$

P234 . $\supset$. » $= \overline{x\varepsilon}\,(y \varepsilon u \,.\supset_y.\, x \varepsilon y) \smile \overline{x\varepsilon}\,(y \varepsilon v \,.\supset_y.\, x \varepsilon y)$

P462 . $\supset$. P.]

465. $u \supset v \,.\supset.\, \smile' u \supset \smile' v$. [Hp . $\supset$. $v = u \smile v$. P463 . $\supset$. Ths]

466. $u \supset v \,.\supset.\, \frown' v \supset \frown' u$. [» » P464 »]

467. $\smile'(u \frown v) \supset (\smile' u) \frown (\smile' v)$. [Hp.$\supset$.$u \frown v \supset u$.$u \frown v \supset v$.P465.$\supset$.Ths]

468. $(\frown' u) \smile (\frown' v) \supset \frown'(u \frown v)$. [» » .P466.$\supset$.Ths]

{P463-8. C. Burali-Forti. « *Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles* », Math. Ann. t. 47 a. 1895}.

Si osservi che i simboli $\bigcap$ e $\bigcup$ indicano il prodotto logico e la somma logica, rispettivamente, mentre i simboli $\cup$ e $\cap$ significano *et* e *aut*.

Nell'edizione del 1902-03 Burali-Forti curò interamente i paragrafi relativi alle voci: curvatura, torsione, torsione relativa, punti ordinari, punti di flesso, punti di regresso, cicloide ed epicicloide:

§91 curvatura torsio Torsio

par C. Burali-Forti.

curv torsio ✻ 1. Hp §rectaT 1 $. \supset .\therefore$

·0 $\mathrm{curvatura}(p,x) = \mathrm{curv}(p,x) =$
$2\,\mathrm{lim}[\{\mathrm{d}[py, \mathrm{rectaT}(p,x)] / [\mathrm{d}(py, px)]^2\} \mid y, \mathrm{Variab}p, x]$ Df

curvatura = courbure ou flexion.

·01 $\mathrm{torsio}(p,x) = 3\mathrm{lim}[\{\mathrm{d}[py, \mathrm{planO}(p,x)] /$
$[\mathrm{d}[py, \mathrm{rectaT}(p,x)] \times \mathrm{d}(py, px)] \mid y, \mathrm{Variab}p, x]$ Df

torsio = deuxième courbure ou torsion (absolue).

·1 $\mathrm{D}px \,\varepsilon\, \mathrm{v}-\iota 0 \,.\, \mathrm{D}^2px \,\varepsilon\, \mathrm{v} \,.\supset.\, \mathrm{curvatura}(p,x) =$
$\mathrm{mod}[(\mathrm{D}px)\alpha(\mathrm{D}^2px)] / [\mathrm{mod}\mathrm{D}px]^2 =$
$\mathrm{mod}[(\mathrm{cmp}\perp\mathrm{D}px)\mathrm{D}^2px] / (\mathrm{D}px)^2 = \mathrm{modD}(\mathrm{UD}px)/\mathrm{modD}px$

·2 $\mathrm{D}px \,\varepsilon\, \mathrm{v}-\iota 0 \,.\, \mathrm{D}^2px \,\varepsilon\, \mathrm{v}-\mathrm{qD}px \,.\, \mathrm{D}^3px \,\varepsilon\, \mathrm{v} \,.\supset.$
$\mathrm{torsio}(p,x) = \mathrm{mod}[(\mathrm{D}px)\alpha(\mathrm{D}^2px)\alpha(\mathrm{D}^3px)]/[(\mathrm{D}px)\alpha(\mathrm{D}^2px)]^2 =$
$\mathrm{modD}\{\mathrm{U}[\mathrm{I}\,(\mathrm{D}px)\alpha(\mathrm{D}^2px)]\}/\mathrm{modD}px$

·3 $[\mathrm{curvatura}(p,x) \mid x'\,k] = \iota 0 \,.=.\, \exists\, \mathrm{p}_2 \cap u \ni (p'k \supset u)$

·4 $[\mathrm{torsio}(p,x) \mid x'\,k] = \iota 0 \,.\supset.\, \exists\, \mathrm{p}_3 \cap u \ni (p'k \supset u)$
{ P·0·01 C. Burali-Forti, Torino A. a.1901 }

✻ 2. Hp P1 $. \supset .\therefore$

·1 $m,n \varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, m < n \,.\, \mathrm{D}px = \mathrm{D}^2px = \ldots = \mathrm{D}^{m-1}px = 0 \,.\, \mathrm{D}^mpx \,\varepsilon$
$\mathrm{v}-\iota 0 \,.\, \mathrm{D}^{m+1}px, \ldots, \mathrm{D}^{n-1}px \,\varepsilon\, \mathrm{qD}^mpx \,.\, \mathrm{D}^npx \,\varepsilon\, \mathrm{v}-\mathrm{qD}^mpx \,.\supset:$
$\mathrm{curvatura}(p,x) \,\varepsilon \mathrm{Q} \quad .=.\, n = 2m$
$\quad$ » $\quad = \infty \,.=.\, n < 2m$
$\quad$ » $\quad = 0 \,.=.\, n > 2m$

·11 $\mathrm{Hp}\,\mathrm{P}{\cdot}1 \,.\, n = 2m \,.\supset.\, \mathrm{curvatura}(p,x) =$
$(2 \times m! / n!)\{\mathrm{mod}[(\mathrm{D}^mpx)\alpha(\mathrm{D}^npx)] / [\mathrm{modD}^mpx]^2\}$

·2 $\mathrm{Hp}\,\mathrm{P}{\cdot}1 \,.\, r\varepsilon \mathrm{N}_1 \,.\, n < r \,.\, \mathrm{D}^{n+1}px, \ldots, \mathrm{D}^{r-1}px \,\varepsilon\, (\mathrm{qD}^mpx + \mathrm{qD}^npx)$
$.\, \mathrm{D}^rpx \,\varepsilon\, \mathrm{v}-(\mathrm{qD}^mpx + \mathrm{qD}^npx) \,.\supset:$
$\mathrm{torsio}(p,x) \,\varepsilon \mathrm{Q} \quad .=.\, r = m+n$
$\quad$ » $\quad = \infty \,.=.\, r < m+n$
$\quad$ » $\quad = 0 \,.=.\, r > m+n$

§92 pntOrdin flex cusp' cusp''

par C. Burali-Forti.

✻ 1. Hp §rectaT 1 $.\, \exists \mathrm{p}_2 \cap u \ni (p'k \supset u) \,.\supset.$

·1 $\mathrm{pntOrdin}p = y \ni \exists (z,h) \ni \{z \varepsilon k \,.\, y = pz \,.\, h \varepsilon \mathrm{Q} : x \varepsilon\, \mathrm{rectaT}(p,z) \,.$
$a \varepsilon\, p'[k \cap (z+\theta h)] \,.\, b \varepsilon\, p'[k \cap (z-\theta h)] \,.\supset_{x,a,b}.\, (a-y)\times(x-y)\,\varepsilon$
$-\mathrm{Q}(b-y)\times(x-y) \,.-\exists\, \mathrm{rectaT}(p,z) \cap (a+\Theta(b-a))\}$ Df

·2 (flex , $-$Q , $\exists$)|(pntOrd , $-$Q , $-\exists$) P·1 Df

·3 (cusp' , Q , $\exists$)| » Df

·4 (cusp'' , Q , $-\exists$)| » Df

pntOrdin = point ordinaire
flex = » d'inflexion
cusp' = » de rebroussement du premier ordre
cusp'' = » » » » deuxième ordre.

On obtient les Df de « flex$p$ », « cusp'p », « cusp''p », en faisant dans la P·1 les substitutions indiqué par les P·2·3·4.

✻ 2. HpP1 . Hp§curvatura 2·1 $.\supset:$

·1 $px \,\varepsilon\, \mathrm{pntOrdin}p \,.=.\, m\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1 \,.\, n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_1$

·2 $px \,\varepsilon\, \mathrm{flex}p \,.=.$ » $.\, n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_0+1$

·3 $px \,\varepsilon\, \mathrm{cusp}'p \,.=.\, m\varepsilon\, 2\mathrm{N}_1$. »

·4 $px \,\varepsilon\, \mathrm{cusp}''p \,.=.$ » $.\, n\varepsilon\, 2\mathrm{N}_1$

Voir G. Peano, *Applicazioni Geometriche* a.1887 p.97-100.

·5 $px \,\varepsilon\, (\mathrm{pntOrdin}p \cup \mathrm{cusp}''p) \,.\supset.\, \mathrm{curvatura}(p,x) \,\varepsilon\, (\mathrm{Q}_0 \cup \iota\infty)$

·6 $px \,\varepsilon\, (\mathrm{flex}p \cup \mathrm{cusp}'p) \,.\supset.$ » $\varepsilon\, (\iota 0 \cup \iota\infty)$
{ C. Burali-Forti TorinoA. a.1901 }

§93 cycloides epicycloides
par C. Burali-Forti.

✻ 1. $o\varepsilon \mathrm{p} \,.\, u,v,\varepsilon \mathrm{v} \,.\, u^2 = v^2 = 1 \,.\, u \times v = 0 \,.\, i = v/u \,.$
$r,h \varepsilon \mathrm{q} - \iota 0 \,.\, p = \{(o + rxu + riu + he^{-ix}iu) | x, \mathrm{q}\} \,.\supset:$

La courbe plane p'q est engendrée par un point lié invariablement à une circonférence de rayon r, et à la distance h de son centre, qui roule, sans glisser, sur la recta(o,u). Pour $h = \pm r$ on a la « cycloide propre ».

·1 $\exists \mathrm{cusp}'p \,.=.\, \mathrm{mod}h = \mathrm{mod}r$
·11 $h = r \,.\supset.\, \mathrm{cusp}'p = p'((2\mathrm{n}+1)\pi)$
·12 $h = -r \,.\supset.$ » $= p'(2\mathrm{n}\pi)$
·13 $x\varepsilon \mathrm{q} \,.\, px \,\varepsilon\, \mathrm{cusp}'p \,.\supset.\, \mathrm{curvatura}(p,x) = \infty$
·14 $\exists \mathrm{cusp}'p \,.\supset.\, \mathrm{Num}(\mathrm{cusp}'p) \,\varepsilon\, \mathrm{infn} \,.\, \mathrm{cusp}'p \supset \mathrm{recta}(o,u)$
·15 $x\varepsilon \mathrm{q} \,.\, px - \varepsilon \mathrm{cusp}'p \,.\supset.\, \mathrm{rectaN}(p,x) = \mathrm{recta}(px\,,\, o + rxu)$
·16 » ε » » $(px\,,\, iu)$
·17 » $.\, \exists \mathrm{cusp}'p \,.\, px - \varepsilon \mathrm{cusp}'p \,.\supset.\, /\mathrm{curvatura}(p,x) =$
$2\mathrm{mod}(o + rxu - px) = 4\mathrm{mod}(\sin x/2)$

·2 $\exists \mathrm{flex}p \,.=.\, \mathrm{mod}h < \mathrm{mod}r$
·21 » $.\supset.\, \mathrm{flex}p = p'[\mathrm{q} \cap x \ni (\cos x = -h/r)]$
·22 $x\varepsilon \mathrm{q} \,.\, px \,\varepsilon\, \mathrm{flex}p \,.\supset.\, \mathrm{curvatura}(p,x) = 0$
·23 $\exists \mathrm{flex}p \,.\supset.\, \mathrm{Num}(\mathrm{flex}p) \,\varepsilon\, \mathrm{infn}$
·24 $x\varepsilon \mathrm{flex}p \,.\supset.\, \mathrm{flex}p \supset \mathrm{recta}(x,u)$
·3 $-\exists \mathrm{cusp}''p \,.\, -\exists[\mathrm{q} \cap x \ni (px \,\varepsilon\, \mathrm{pntOrdin}p \,.\, \mathrm{curvatura}(p,x) \,\varepsilon\, (\iota 0 \cup \iota\infty)]$
·31 $\exists \mathrm{cusp}'p \,.\supset.\, -\exists \mathrm{flex}p$

epicycl ✻ 2·0 $r,r',h\varepsilon \mathrm{q} - \iota 0 \,.\supset.\, \mathrm{epicycl}(r,r',h) = x \ni \exists (o,u,v,i) \ni$
$\{o\varepsilon \mathrm{pnt} \,.\, u,v\varepsilon \mathrm{vct} \,.\, u^2 = v^2 = 1 \,.\, u \times v = 0 \,.\, i = v/u \,.\, x =$
$[(o + (r+r')e^{\frown}(ix)u + he^{\frown}[ix(r+r')/r']u | x' \mathrm{q}]\}$ Df
·01 $\mathrm{epicycl} = x \ni \exists (r,r',h) \ni [r,r',h\varepsilon \mathrm{q} - \iota 0 \,.\, x\varepsilon\, \mathrm{epicycl}(r,r',h)]$ Df

Appelons « epicycl(r,r',h) » toute « roulette », engendrée par un point lié invariablement à une circonférence de rayon r', et à la distance h de son centre, qui roule, sans glisser, sur une autre circonférênce fixe de rayon r.

Nel quarto volume del *Formulario* (1902-03) Peano inserisce anche alcune proposizioni estratte dalle memorie di Burali-Forti del 1896, 1897, 1901, relative al metodo di Hermann Grassmann nella Geometria proiettiva.[27]

[27]Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 10 (1896), 177-195; Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 64-82; Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15 (1901), 310-320.

✻ 28. posit

Il y a une analogie évidente entre les produits alternés de Grassmann et les objets de la Géométrie de position. Mais ils ne coïncident pas. Par ex., un vecteur a 3 coordonnées; un point à l'infini dépend seulement des rapports de ces trois coordonnées.

M. Burali-Forti, *Il metodo di Grassmann nella Geometria proiettica*, PalermoR. a.1896,1897,1901, a considéré les objets de la Géométrie projective comme les « positions » des produits *a*, qu'il indique par le symbole « posit ». L'A. a bien voulu extraire de ses Mémoires les P suivantes:

$\cdot 1 \quad a \varepsilon \varphi^1 - \mathrm{v} \;.\supset.\; \mathrm{posit}a = a/(\omega a)$ Df

$\cdot 11 \quad a,b \,\varepsilon\, \mathrm{v} - \iota 0 \;.\supset:\; \mathrm{posit}a = \mathrm{posit}b \;.=.\; a \varepsilon \mathrm{q}b$ Df

$\cdot 12 \quad a,b \,\varepsilon\, \varphi^1 - \iota 0 \;.\supset:\; \mathrm{Ths P}\cdot 11$

$\cdot 13 \quad \mathrm{posit}`(\varphi^1 - \mathrm{v}) = \mathrm{p}$

$\mathrm{posit}`(\mathrm{v} - \iota 0) =$ point à l'infini.

$\mathrm{posit}`(\varphi^1 - \iota 0) =$ point projectif.

$\cdot 2 \quad a \varepsilon \varphi^1 a \varphi^1 - \iota 0 \;.\supset.\; \mathrm{posit}a = \mathrm{posit}`[\varphi^1 - \iota 0 \cap x \ni (xaa = 0)]$ Df

$\cdot 21 \quad a,b \varepsilon \varphi^1 a \varphi^1 - \iota 0 \;.\supset:\; \mathrm{posit}a = \mathrm{posit}b \;.=.\; a \varepsilon \mathrm{q}b$

$\mathrm{posit}`(\varphi^1 a \varphi^1 - \iota 0) =$ droite projective.

$\mathrm{posit}`(\mathrm{v}^2 - \iota 0) =$ droite a l'infini.

$\cdot 3 \quad a \varepsilon \varphi^3 - \iota 0 \;.\supset.\; \mathrm{posit}a = \mathrm{posit}`[\varphi^1 - \iota 0 \cap x \ni (xaa = 0)]$ Df

$\cdot 31 \quad a,b \varepsilon \varphi^3 - \iota 0 \;.\supset:\; \mathrm{posit}a = \mathrm{posit}b \;.=.\; a \varepsilon \mathrm{q}b$

$\mathrm{posit}`(\varphi^3 - \iota 0) =$ plan projectif.

$\mathrm{posit}`(\mathrm{v}^3 - \iota 0) =$ plan à l'infini.

$\cdot 4 \quad a,b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, a -= b \;.\supset.\; \mathrm{posit}(aab) = \mathrm{recta}(a,b) \cup \mathrm{posit}(b-a)$

$\cdot 41 \quad a,b \varepsilon \mathrm{p} \,.\, a -= b \,.\, c \varepsilon \mathrm{p} - \mathrm{recta}(a,b) \;.\supset.\; \mathrm{posit}(aabac) = \mathrm{plan}(a,b,c) \cup \mathrm{posit}(b-a)a(c-a)$

Les P·13·4·41 établissent la liaison parmi les objets p, p^2, p^3 de la Géométrie ordinaire et les objets de la Géométrie de position (ou projective).

Si trovano qui le definizioni di punto, di punto proiettivo, di punto all'infinito, di piano proiettivo, e di piano all'infinito. Alcune di queste proposizioni vennero poi ripubblicate nell'edizione successiva (1908) del *Formulario*, in latino sine flexione, con la seguente osservazione:

«Posit», lege «positione», es simbolo introducto per Prof. Burali-Forti, (*Il metodo di Grassmann nella Geometria proiettica*, Palermo R. a.1896,1897,1901,) et *Lezioni di Geometria metrico proiettica*, Torino a.1904, p. 95) pro defini elementos de Geometria de positione ope Calculo geometrico de Grassmann.

·1 Si *a* es forma de gradu 1, non reductibile ad vectore, suo «positione» vale forma diviso per massa, id es suo barycentro.

·11 Si *a* et *b* es vectore non nullo, nos dice que illos habe idem positione, si es parallelo.

«Positione» de vectore vocare et «directione», vel «puncto ad infinito».

·2 Si *a* es producto de duo forma de gradu 1, non nullo, suo «positione» vale positione de omni forma de gradu 1, non nullo, que habe cum *a* producto non nullo.

·21 Si *a* et *b* es producto de duo forma de gradu 1, nos dice que illos habe idem positione si *a* es producto de *b* per numero.

«Positione» de bivectore vocare et «recta ad infinito».

·31 «Positione» de trivectore vocare et «plano ad infinito».

Un'altra testimonianza dell'impegno di Burali-Forti nella promozione del *Formulario* di Peano si può trarre dal seguente commento di Generoso Gallucci che riferisce di un dialogo immaginario con Burali-Forti, che si sarebbe svolto nel Salotto della *Pensione Fondini a Firenze* nell' ottobre 1908, durante la riunione della «Società Italiana per il Progresso delle Scienze». In appendice a tale dialogo egli pubblica i seguenti:

Frammenti di una corrispondenza inedita

«Nel 1902 pubblicai un lavoro dal titolo: *Introduzione alla filosofia delle matematiche.* La ricerca, imperfetta e lacunosa, corrispondeva esattamente alla fase iniziale del mio pensiero speculativo (fase kantiana con interferenze vichiane) e perciò non piacque ai competenti. Un primo rabbuffo lo ebbi dal prof. Cesare Burali Forti, che mi rimproverò perché avevo trascurata la Logica matematica. Ecco qualche brano della sua lettera.

Torino, 6 ottobre 1902

Preg. Sig. Professore

Ella non cita il *Formulaire Mathématique*, del prof. G. Peano, nel quale le quistioni di filosofia matematica sono ampiamente trattate; ora alcune delle Sue conclusioni sono opposte a quelle contenute nel Formulaire, che oltre ad esaminare la quistione in generale (Logica matematica) la tratta anche nei più minuti particolari.

Cito ad es. la quistione del *vero.* Nel *Formulaire* una proposizione è vera (assolutamente vera) quando *dalla sua ipotesi* SI DEDUCE, *con leggi logiche esattamente stabilite, la tesi.* Questo è in sostanza il principio del simbolismo universale, ideato ma non realizzato da Leibniz. Così ad es. la prop. «Se a è un numero pari, *si deduce che*, $a+1$ è dispari» è assolutamente vera, qualunque sia a; anche se al posto di a metto ad es. 1 «se 1 è numero pari, si deduce che, 2 è dispari». Si ha quindi un criterio logico per il vero assoluto matematico. È esso applicabile alle scienze esperimentali? No, perché la *traduzione matematica* di un fatto meccanico non tien conto del *fenomeno* con tutti i suoi elementi; in altri termini la formula matematica non è il *ritratto* del fenomeno meccanico, ma ne è soltanto la *silhouette.*

Burali Forti»[28]

[28]Cfr. GALLUCCI Generoso, «Frammenti di una corrispondenza indedita» *Atti dell'Accademia "Leonardo da Vinci".* (1934-1935), 113-114.

2.5 Il paradosso di Burali-Forti

Come è ben noto fra il 1879 ed il 1884 Georg Cantor espone le sue ricerche fondamentali sulla «teoria degli insiemi». Ben pochi apprezzano queste novità, e alcuni addirittura le osteggiano rifiutando di pubblicare i suoi lavori e perfezionamenti in tale ambito. Burali-Forti dedica alla teoria di Cantor una serie di studi critici fra il 1894 e il 1897. Ad uno di questi spetta il merito di aver aperto la serie di antinomie della teoria degli insiemi[29], cioè di aver mostrato la prima di una serie di contraddizioni emerse nell'ambito della cosiddetta «crisi dei fondamenti». L'antinomia che concerne la nozione di numero ordinale, apparve nel 1897 sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* con il titolo: «Una questione sui numeri transfiniti».

Evandro Agazzi la descrive in questo modo:

> «Nella teoria cantoriana degli ordinali transfiniti si dimostra che ogni insieme di numeri ordinali è ben ordinato e che a tale ordinamento corrisponde un numero ordinale che è maggiore di ciascuno degli ordinali appartenenti a quell'insieme. Si consideri ora –osserva il Burali– l'insieme di tutti i numeri ordinali: in base al teorema suddetto, esso deve essere caratterizzato da un numero ordinale che è maggiore di tutti i possibili ordinali, il che è contraddittorio, perché anch'esso appartiene all'insieme di tutti gli ordinali.»[30]

Lo stesso Cantor si era reso conto nel 1889 che la sua teoria degli insiemi presentava una antinomia. Se I è l'insieme di tutti gli insiemi per il teorema sulla cardinalità dell'insieme potenza $cardP(I) > card(I)$. Essendo $P(I)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di I esso deve essere parte dell'insieme di tutti gli insiemi ossia di I stesso, di conseguenza, dunque, $cardP(I) < card(I)$, che contraddice la precedente deduzione. Nel 1895 Cantor aveva trovato una nuova antinomia relativa agli ordinali transfiniti, analoga a quella pubblicata de Burali-Forti nel 1897, e l'aveva comunicata a D. Hilbert nel 1897, e a R. Dedekind nel 1899, senza peraltro pubblicare nulla al riguardo.[31] La nota di Burali-Forti rimarrà pressoché inosservata fino a quando nuove antinomie non saranno pubblicate nel 1903 da Gottlob Frege e da Bertrand Russell.

[29]Sul problema delle antinomie della teoria degli insiemi cfr. GRATTAN GUINNESS, *The search for Mathemathical Roots (1870-1940), Logics, Set Theories and the foundations of Mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton, University Press, 2000, 331-338, 361-371, 467-478, 493-494, 571-572.

[30]Cfr. AGAZZI, Evandro, «Burali-Forti, Cesare», *Dizionario biografico degli italiani*, 15 (1972), 376-381, 377.

[31]Cfr. Cantor a Hilbert 26.9.1897 e R. Dedeking a Cantor 3. 8.1899, in *Georg Cantor Briefe*, a cura di MESCHKOWSKI H., NILSON, H., Berlin, Springer, 1991, 388-389, 407-411.

> «il carattere più elementare dell'antinomia russelliana farà sì che ad essa venga prestata maggiore attenzione, non potendosi più ritenere (come si poteva essere indotti nel caso di quella del Burali) che essa possa attribuirsi a qualche difetto nella formulazione di concetti altamente tecnici della teoria degli insiemi.»[32]

Infatti nel lavoro di Burali-Forti c'è un fraintendimento del significato di «insieme ben ordinato» e quindi di ordinale, secondo Cantor.

Cantor aveva infatti definito nel 1883 un insieme ben ordinato I quando soddisfa le tre condizioni:

1. Ha un primo elemento
2. Ogni elemento di I che ha un successore, possiede un successore immediato
3. Se un insieme finito o infinito di elementi di I ha un successore, ha un successore immediato

Burali-Forti aveva omesso la terza condizione e sulla base di questa svista aveva introdotto gli insiemi perfettamenti ordinati.

Resosi conto dell'errore commesso egli pubblica nell'ottobre del 1897 la breve nota: Burali-Forti, Cesare, «Sulle classi ben ordinate», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 260, nella quale offre la definizione corretta e osserva che si deduce facilmente che ogni classe ben ordinata è anche perfettamente ordinata ma non vale il viceversa. Alla luce del fraintendimento sopra citato gli storici si sono interrogati sull'effettiva consapevolezza da parte di Burali-Forti della antinomia. Egli potrebbe infatti aver semplicemente pensato di aver fornito una dimostrazione per assurdo del fatto che per i tipi di ordine delle classi perfettamente ordinate non vale la tricotomia.[33] Questo sarebbe confermato nella lettera che Burali scrive a L. Couturat fra il dicembre del 1905 e il gennaio del 1906, un estratto della quale è edito sulla *Revue de Métaphysique et de Morale* ed è utilizzato da H. Poincaré per screditare la Logica matematica.

Dai carteggi successivi di Burali-Forti e dalle affermazioni apparse nella seconda edizione del suo manuale Burali-Forti, Cesare, *Logica matematica, Seconda edizione*, Milano, Hoepli, 1919, a proposito delle antinomie, si

---

[32] Cfr. Agazzi, Evandro, «Burali-Forti, Cesare», *Dizionario biografico degli italiani*, 15 (1972), 376-381, 377.

[33] Scopo dell'articolo di Burali-Forti era dimostrare che la legge di tricotomia non è sempre verificata per gli ordinali, ovvero dati due ordinali α e β non si può affermare che sia sempre $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ o $\alpha = \beta$

evidenzia la sua incomprensione delle implicazioni filosofiche delle antinomie e della necessità di superarle.[34]

2.6 La libera docenza

Su invito di Giuseppe Peano, Burali-Forti svolge all'Università di Torino lezioni non ufficiali di Logica nel 1893-94 che saranno raccolte nel manuale *Logica matematica* edito da Hoepli nel 1894, con una riedizione ampliata e completamente rifatta e arricchita di risultati originali che sarà pubblicata nel 1919. Molto probabilmente tali lezioni erano tenute nell'ambito del corso

[34]Cfr. LUCIANO, Erika & ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *Giuseppe Peano - Louis Couturat. Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005, XLII-L, 221-227. Cfr. anche: SCHMID, Anne-Françoise, (a cura di), *Bertrand Russell. Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913). Tome I*, Paris, Kimé, 2001; SCHMID, Anne-Françoise, (a cura di), *Bertrand Russell. Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913). Tome II*, Paris, Kimé, 2001. Ecco quanto Burali-Forti scrive ad esempio a G. Vacca in una lettera del 28.3.1906: «Ho avuta la sua lettera del 24. La sua Pp $x \cap \iota x = \Lambda$ riduce proprio al *nulla* il paradosso di Russell. È inoltre tanto semplice e tanto opportuna che pare strano non sia stata osservata prima. [...] Non capisco però come cada anche il mio paradosso sui *numeri ordinali*. Ecco quanto faccio per ottenere il paradosso: a) Ammetto con Cantor che si possa considerare il tipo d'ordine o numero di una classe u ordinata *in certo modo* (perfettamente ordinata) e chiamo N_0 la classe dei tipi d'ordine di tali classi. b) *Ammesso* col Cantor che "se a, b sono num. ordinali $a = b$ o $a > b$ o $a < b$" dimostro che gli N_0 ordinati in senso crescente formano una classe perfettamente ordinata. Posso dunque considerare il tipo d'ordine Ω degli N_0 disposti in ordine crescente. c) Ricavo che ogni N_0 è minore di Ω. Ma ricavo pure che $\Omega + 1$ è un N_0 e che è maggiore di Ω. Ergo... [...] Sono ancora di opinione che l'assurdo dei num. ordinali non cadrà che con la caduta dei numeri stessi, che devono avere un vizio di origine. Staremo a vedere.» Cfr. NASTASI, Pietro & SCIMONE, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1995, 20. Nella lettera a Mario Pieri del 26.8.1908 Burali dichiara invece: «Voglio divertirmi ancora un poco con quello che chiamano il mio paradosso; poi inviterò questi scienziati a leggere meglio la mia nota e vedranno che io ho *dimostrato* questo teor.: $\exists(xy) \ni [xy \in \text{Ordinali } x \sim= y \; x \sim> y \; x \sim< y]$.» cfr. ARRIGHI, Gino, (a cura di), *Lettere a Mario Pieri (1884-1913). Quaderni P.RI.ST.EM. N.6. Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Milano, Bocconi, 1997, 19. Nella seconda edizione della sua *Logica Matematica* egli scrive: «Ci limitiamo ad alcune osservazioni che serviranno a porre in chiaro *una questione sui numeri transfiniti* che fin dal 1897 io ho trattata e sulla quale sono state fatte numerose disquisizioni, dopo le quali mantengo inalterate le conclusioni alle quali sono giunto nel 1897. [...] Tutte le osservazioni fatte alla mia nota cadono senz'altro [...] e nessuna delle osservazioni fatte può provare che una delle mie dimostrazioni sia falsa che il mio *teorema* possa chiamarsi *paradosso* nel senso *etimologico* della parola sta bene, ma non cessa di essere una verità. Cfr. BURALI-FORTI, Cesare, *Logica matematica, Seconda edizione*, Milano, Hoepli, 1919, 329-331.

di Calcolo infinitesimale di Peano, di cui Burali-Forti era assistente dal 1894 al 1896.

Alcuni storici riferiscono di un giovanile insuccesso di Burali-Forti nell'esame di libera docenza che gli sarebbe costato l'esclusione dalla carriera universitaria, dato che non avrebbe mai più ritentato.[35] Marcolongo osserva che «non se ne doleva e mai gli udii pronunciare una amara parola».[36] Nessuna documentazione è fornita dagli storici sull'esame di libera docenza, né si precisa su quale disciplina Burali-Forti l'avrebbe sostenuto. Kennedy, Agazzi e Bottazzini attribuiscono l'insuccesso all'avversione dei matematici italiani nei confronti dei vettori.

Dai documenti conservati nell'Archivio Storico dell'Università di Torino risulta che nel 1894 Burali-Forti presentò una domanda di libera docenza per titoli in *Logica Matematica*, come si evince dai verbali della Facoltà di Scienze MFN del 18 giugno 1894:

> «Domanda di libera docenza in Logica matematica del Signor Dottor Cesare Burali-Forti. La Facoltà, tenuto conto del regolamento generale e delle deliberazioni prese dal C.S. in merito alle concessioni di libera docenza, delibera di interpellare il Ministero se, malgrado l'articolo 100 della Legge Casati, si possa procedere all'esame dei titoli facendo in pari tempo osservare che esiste un precedente favorevole nel fatto che nell'Università di Roma un corso libero di Logica matematica viene fatto dal Prof. Nagy.»[37]

Tale domanda venne però ritirata come testimonia il verbale della seduta di Facoltà del 3 luglio 1894:

> «Il Preside comunica: [...] una lettera rettorale n. 2577 1/5 in data 22 giugno 1894 colla quale si annunzia avere il Sig. Dott.

[35]Cfr. Marcolongo, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185, 185; Agazzi, Evandro, «Burali-Forti, Cesare», *Dizionario biografico degli italiani*, 15 (1972), 376-381, 378; Kennedy, Hubert, *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano. Definitive Edition*, Concord, Peremptory Publications, 2006, 122; Bottazzini, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Torino, UTET, 1998, 323.

[36]In una lettera a Tullio Levi-Civita Burali-Forti scrive alludendo alla sua posizione di insegnante non universitario: «Se nel principio della mia carriera mi fossi imbattuto in persone oneste e franche come Lei non sarei nella posizione attuale.«Cfr. Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica Applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873-1941). Quaderni P.RI.ST.EM. N.14. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2003, 558.

[37]Archivio Storico dell'Università di Torino, Colloc. VII-81, Verbale dell'adunanza dei Prof. Ordinari e Straordinari della Fac. di Scienze dell'Univ. di Torino in data 18 giugno 1894, N° 100.

> Burali-Forti pregato il Rettore di non dar corso alla sua domanda di libera docenza in Logica matematica.»[38]

Non abbiamo prova documentaria della decisione di Burali-Forti a rinunciare alla libera docenza. Possiamo semplicemente ipotizzare che egli fosse venuto a conoscenza dell'ostilità dell'ambiente matematico italiano nei confronti della Logica matematica e dell'introduzione nell'insegnamento della teoria dei vettori. Tale ostilità è ad esempio provata nella *Relazione* della commissione di concorso a professore di calcolo infinitesimale nel 1890 di cui fu vincitore Peano, dove si legge:

> «Il trattato delle applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale è inferiore a molte opere dello stesso argomento uscite prima e contemporaneamente al lavoro del Peano, avendo l'autore tralasciato molti dei più importanti capitoli della geometria differenziale, forse perché troppo preoccupato del metodo che ha voluto usare (il calcolo dei segmenti), metodo che non sarebbe opportuno introdurre nell'insegnamento in sostituzione di quelli classici.
>
> La tendenza mostrata dal Peano in questo e in lavori successi, ove introduce i simboli della logica deduttiva, non sembra voler giovare né al progresso della Scienza né alla chiarezza dell'insegnamento.»[39]

2.7 Il manuale di Logica matematica

Come abbiamo detto nel 1894 esce la prima edizione della *Logica matematica* di Cesare Burali-Forti. Giovanni Vailati scrive la recensione del volume che si apre dicendo:

> «La pubblicazione di questo Manuale viene a proposito per offrire ai non pochi che ora s'interessano ai progressi della Logica matematica il mezzo di farsi facilmente un concetto dello stato attuale di questa disciplina che va sempre più acquistando diritto di cittadinanza fra le scienze matematiche. Anche chi si trovasse affatto digiuno della materia può trovare nei primi capitoli del

[38] Archivio Storico dell'Università di Torino, Colloc. VII-81, Verbale dell'adunanza dei Prof. Ordinari e Straordinari della Fac. di Scienze dell'Univ. di Torino in data 3 luglio 1894, N° 101.

[39] Bollettino ufficiale della Pubblica Istruzione, a. XVIII, n. 16, 16.04.1891, 428.

> libro del Burali tutto ciò che gli abbisogna per porsi in grado di passare con lui in rassegna i principali metodi e alcune tra le più interessanti applicazioni del calcolo logico.»[40]

La comparsa della seconda edizione di questo manuale nel 1919 scatenerà nel 1921 una dura polemica fra Federigo Enriques e Cesare Burali-Forti.[41] Secondo Gabriele Lolli[42] gli argomenti di Enriques derivano probabilmente dalla riflessione che sta compiendo in quegli anni per la stesura del suo libro *Per la storia della logica* che uscirà nel 1922.

Il dibattito, osserva Lolli, «si svolge al di sotto della apparente educazione e del dichiarato rispetto, con una acredine ed una violenza palpabili. L'ironia pesante se così si può gentilmente definirla, resta nella memoria come una condanna senza appello, ma la polemica trascende forse la pura disputa scientifica, a partire dalla evidente insofferenza di apertura di Enriques per il nazionalismo becero di Burali-Forti.»[43]

Infatti Enriques dopo aver osservato che la recente edizione della Logica (1919), che appare triplicata di mole in confronto al vecchio volumetto, non ha guadagnato molto dal punto di vista didattico e della comprensione, afferma:

> «Dobbiamo anche rilevare, con dispiacere, come l'A. venga meno al rispetto che si deve al lavoro scientifico e alla libertà di apprezzamento «clarorum et obscurorum vivorum», parlando con frasi dispregiative dell'opera di altri matematici, fra cui sono alcuni grandi stranieri come Hilbert e Poincaré (e perfino del logico matematico Russell, che pur tanto ha preso dal nostro Peano), e accusando di servilismo –o perpoco di lesa patria!– gli italiani che ne seguono le idee o vi si accostano per proprio conto.»[44]

---

[40]Cfr. Vailati, Giovanni, «Recensione di: C. Burali-Forti, Logica Matematica», *Rivista di Matematica*, 4 (1894), 143-146.

[41]Da una lettera di F. Enriques a G. Castelnuovo del Febbraio 1901 si deduce comunque la poca simpatia di Enriques per Burali-Forti, o per il suo trattato del 1894: «Sono stato, giorni sono, a Padova, ed ho un po' meglio determinato alcune questioni che mi propongo di svolgere nel corso di Astronomia. Mi sono anche occupato di Logica (inorridisci! ho letto il trattatello di Burali-Forti) e di divertimenti carnevaleschi... » Cfr. Bottazzini, Umberto, Conte, Alberto & Gario, Paola, (a cura di), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino, Bollati Boringhieri, 1996, 472.

[42]Cfr. Lolli, Gabriele, «I critici italiani di Peano: Beppo Levi e Federigo Enriques», In *Atti del Convegno Peano e i fondamenti della matematica,* 1991, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena, Mucchi (1993), 51-71.

[43]Ibidem nota precedente, 65

[44]Cfr. Enriques, Federigo, «Noterelle di Logica matematica», In *Per la scienza. Scritti editi ed inediti*, a cura di Raffaella Simili, Napoli, Bibliopolis, 2000, 333.

C. Burali-Forti rimane fermo nel suo giudizio, osservando infatti nella risposta ad Enriques:

> «Riguardo al "servilismo" (è proprio la parola!) di alcuni (troppi) italiani, per scienziati, o pseudo-scienziati, esteri, sono *incorreggibile*, e le mie opinioni non si modificano qualunque siano gli argomenti che mi verranno portati, perché ogni argomento cade dinanzi ai fatti. Gli esteri sanno far valere la loro opera scientifica, o artistica; e fanno bene. Gli italiani spesso denigrano l'opera nostra scientifica, o artistica, a tutto vantaggio dell'opera degli esteri; e fanno male. Gli esteri si appropriano, o tentano appropriarsi, quanto di buono, di bello, di importante abbiamo fatto noi italiani; e noi li approviamo, li seguiamo, e purtroppo, sono pochi i Bortolotti[45] che, con squisito senso d'italianità e con grande competenza storica, sappiano rivendicare a noi ciò che è nostro.»[46]

Per quanto riguarda la discussione scientifica G. Lolli osserva che Enriques è feroce nel ridicolizzare la definizione di vettore per mezzo dei volumi di Burali-Forti, che insiste nella recensione nel suo disaccordo nella duplicazione della copula a favore della distinzione tra concetto astratto e classe, al che Burali-Forti può rispondere che si costruisca un tale concetto e che poi si faranno i confronti. Sempre secondo Lolli, Enriques ha ragione sulla necessità dell'assioma di scelta per la dimostrazione della definizione di finito. Enriques tuttavia, sulla scia della discussione della copula fa confusioni inaccettabili sulla classe dotata di un unico elemento, anche se le esprime all'interno di una discussione nella quale Enriques si mostra più accorto di

[45]A proposito di Ettore Bortolotti, G. Israel e P. Nastasi osservano: «Si distingue in modo particolare l'attività infaticabile dello "storico" della matematica Ettore Bortolotti che [...] in altre occasioni si era distinto (e si sarebbe ancora distinto) nel condurre una petulante ed inesauribile polemica contro lo storico della matematica Gino Loria (ebreo), da lui rimproverato a più riprese per scarsa fedeltà ai valori della scienza nazionale e per la propensione ad esaltare le scoperte degli stranieri». Cfr. ISRAEL, Giorgio & NASTASI, Pietro, *Scienza e razza nell'Italia fascista*, Bologna, Il Mulino, 1998, 303. Lo ritroviamo ancora come segretario della commissione scientifica dell'UMI (Unione Matematica Italiana) che riunita il 10 dicembre 1938 emetterà un comunicato nel quale si può leggere: «Essa [la scienza di razza italica (ariana)], anche dopo le eliminazioni di alcuni cultori di razza ebraica, ha conservato di fronte all'estero, il tono della scienza matematica italiana, e maestri che con la loro intensa opera di proselitismo scientifico assicurano alla Nazione elementi degni di ricoprire tutte le cattedre necessarie». Cfr. Ibidem nota precedente, 321.

[46]Cfr. BURALI-FORTI, Cesare, «Polemica logico-matematica. C. Burali-Forti e F. Enriques», *Periodico di matematiche*, 4 (1921), 354-359.

Burali in relazione alla definizione di uguaglianza e alla consapevolezza di non poterla caratterizzare in modo assoluto.[47]

Lolli conclude dicendo che la polemica presa per singoli argomenti non è di livello elevato, da nessuna delle due parti.

La nuova edizione della *Logica matematica* non piacque molto neanche a G. Peano come testimonia una lettera di Burali-Forti a G. Vacca del 16.9.1919:

> «Caro amico,
>
> Grazie vivissime del suo giudizio sulla mia L. M.[Logica Matematica] Ho parlato con Peano. *Dice* di aver letto qua e là perché molto occupato (calcoli graduali!); mi ha ringraziato a bocca chiusa della prefazione che pone in piena luce l'opera vasta e geniale di P.[Peano]; mi ha parlato dei punti che riguardano il Della Casa e Pensa; nulla mi ha detto delle def. errate del Form. È certo che P.[Peano] non può digerire la mia L. M.[Logica Matematica] Credo sia proprio inutile che Lei mandi la recensione a P.[Peano] prima di pubblicarla; ormai P.[Peano] si interessa soltanto di due cose; del calcolo graduale; mantenere a forza il Formulario allo stato di Corano!»[48]

Le divergenze appaiono però già in un'altra lettera a Giovanni Vacca del 30.9.1909, nella quale Burali-Forti mostra forse un progressivo atteggiamento di chiusura o distanziamento dal maestro:

> Non deve prendersela troppo per le controversie matematiche. Dato il carattere di P.[Peano] è inevitabile che tutto il lavoro intelligente e proficuo di alcuni collaboratori sparisca, e rimanga solo quello di coloro che in base ad un *concetto* o ad una *formula* di P.[Peano] hanno arricchito numericamente il Formulario. Eccone un'altro esempio: sono già stenotipate le pagine nelle quali si ritorna alla definizione sbagliata di F e questo solo perché quella della edizione del 1903 è mia e non di P.[Peano] Non è riuscito a trovarne un'altra ed ha soppresso la buona perché non si possa dire che una cosa, che esce dall'ordinaria e materiale compilazione, è stata fatta da persona che non è P.[Peano] Avrà visto anche

[47]Cfr. Lolli, Gabriele, «I critici italiani di Peano: Beppo Levi e Federigo Enriques», In *Atti del Convegno Peano e i fondamenti della matematica,* 1991, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena, Mucchi (1993), 51-71.

[48]Cfr. Nastasi, Pietro & Scimone, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani,* Palermo, Bocconi, 1995, 24.

gli esercizietti logici di Pad.[Padoa], benché di valore nullo, rimangono in piena luce. È una debolezza alla quale bisogna dar poco peso. Peccato che il modo di trattare i collaboratori ritarda la diffusione e il perfezionamento di un algoritmo che ha qualche importanza. A questo unisca le conseguenze dei simboli applicati in larga scala nell'insegnamento, e dovrà dedurne una lunghissima sosta nella diffusione del simbolismo logico, con un ritorno ai vecchi metodi privi di precisione.»[49]

2.8 La Fisica-matematica

Il contributo fondamentale di C. Burali-Forti si è avuto nel campo del calcolo vettoriale e delle omografie vettoriali. Persino Enriques che abbiamo visto criticare duramente Burali-Forti nel paragrafo precedente osserva:

> «Comunque chiuderemo queste critiche auspicando che dagli acrobatismi logici più recenti non venga menomata l'opera di divulgazione che il prof. Burali-Forti ha intrapreso della teoria dei vettori, in unione al chiaro prof. Roberto Marcolongo; poichè codesta teoria –di cui sono note le applicazioni alla fisico-matematica– merita veramente di essere divulgata nelle nostre Università, se anche possa nuocere il troppo zelo di chi, per essa, vorrebbe mettere al bando la vecchia geometria analitica cartesiana!»[50]

Analizzeremo nel capitolo 3 il dibattito intorno alle notazioni vettoriali che partendo da una proposta del 1907-08 di Burali-Forti e Marcolongo sulle pagine dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* continua al Congresso Internazionale dei Matematici di Roma del 1908 e poi sulle pagine de l'*L'Enseignement Mathématique* fra i 1908 e il 1912.

Gli autori pubblicheranno anche una serie di volumi di sistematizzazione delle loro proposte. Prenderemo in considerazione questi volumi nei capitoli 4 e 5. Del 1909 sono i volumi *Calcolo vettoriale*, che vedrà una riedizione in francese l'anno successivo (1910), e *Omografie vettoriali.* Nel 1912 e nel 1913 usciranno i due volumi dell'*Analyse Vectorielle Générale*: *Transformations linéaires* e *Applications à la Mécanique et à la Physique.* Nel 1915 uscirà il quarto volume della collana, intitolato *Astatique* a cura di Matteo Bottasso.

[49]Cfr. Nastasi, Pietro & Scimone, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1995, 21.

[50]Cfr. Enriques, Federigo, «Noterelle di Logica matematica», In *Per la scienza. Scritti editi ed inediti*, a cura di Raffaella Simili, Napoli, Bibliopolis, 2000, 339.

Nel 1921 comparirà la seconda edizione degli *Elementi di calcolo vettoriale.* Nel 1924 l'*Espaces Courbes. Critique de la relativité* di C. Burali-Forti e di T. Boggio del quale ci occuperemo nel capitolo 6. Nel 1929 si riprende l'edizione dell'*Analisi vettoriale generale* in italiano con il volume *Trasformazioni lineari* di C. Burali-Forti e R. Marcolongo, un secondo volume di geometria differenziale di P. Burgatti, T. Boggio e C. Burali-Forti e un terzo volume intitolato *Teoria matematica dell'elasticità* di P. Burgatti. Il piano dell'opera prevedeva un quarto volume di *Idrodinamica* a cura di T. Boggio e un quinto *Elettricità e Magnetismo* di R. Marcolongo che non videro la luce.

Riproduciamo in questo paragrafo in forma estesa alcune testimonianze di Marcolongo riguardanti la collaborazione con Burali-Forti, lasciando ai prossimi capitoli la discussione matematica dei contenuti.

Nel suo necrologio di C. Burali-Forti, Marcolongo racconta come iniziò la collaborazione fra i due:

> «Nei primi anni del mio insegnamento di Meccanica e di Fisica-matematica nella Università di Messina io mi era subito valso dei metodi vettoriali e del così detto sistema minimo, adottando le notazioni di Peano. Una questioncella provocò un primo e vivace scambio di lettere; ma pur attraverso inevitabili divergenze, dovute all'indole dei nostri studi, delle nostre così diverse attitudini e fin dei nostri caratteri, poiché insieme convenivamo di dover trattare i vettori in modo autonomo, i vettori coi vettori, indipendentemente da ogni sistema di coordinate, fui io il primo a proporre una collaborazione subito accolta con entusiasmo e con fraterna amicizia. Ne risultarono i lavori sulla unificazione delle notazioni vettoriali, con esame ampio, critico e storico di tutte le notazioni proposte per il sistema minimo e poi il libro degli *Elementi di calcolo vettoriale*, subito tradotto in francese.
>
> Ma per la Meccanica dei corpi continui e per la geometria differenziale su di una superficie il sistema minimo serviva sì in parte e alquanto faticosamente; ma si mostrava impotente per altre fondamentali ricerche. Qual era la via per vincere la difficoltà, per dare un assetto semplice ed uniforme ai nuovi problemi da trattarsi con metodi analoghi a quelli così semplici ed eleganti del sistema minimo? La definizione di gradiente di un numero non aveva dato luogo a nessuna difficoltà; non giungemmo che dopo molti sforzi a quella di rotore coll'artificio dei due spostamenti da attribuirsi al punto di cui il vettore è funzione; e quindi a quella di divergenza, eliminando così le definizioni fondate su proprietà integrali.»

Il sistema minimo però rivela i suoi limiti nelle applicazioni e diventa necessario andare oltre questo sistema:

> «Ma eran sempre definizioni un po' artificiose. La soluzione più naturale doveva darla la teoria delle trasformazioni lineari. La parte geometrica di queste non presentò gravi difficoltà. Burali allontanandosi dalla via già in precedenza seguita da W. Gibbs (diadi o calcolo diadico), ispirandosi alla analisi delle deformazioni omogenee di W. Thomson, ne tracciò subito le linee fondamentali e a me non restò che il compito di mostrarne la eleganza e la semplicità con le applicazioni. Ma la parte funzionale, dovendo escludere l'operatore tachigrafico hamiltoniano, in qual modo poteva essere costruita in modo autonomo? Ed è qui che il Burali ha avuto una idea felice e geniale. Peano, nel suo *Calcolo geometrico*, aveva definito la derivata di un ente di un sistema lineare[51] rispetto ad un ente del sistema; ma i punti non formando un sistema lineare, la definizione di Peano non comprende quegli enti che dominano quasi tutta la fisica (numero, punti, vettori, omografie, ecc.) che sono funzioni di punti. Nel modo più semplice Burali definisce le derivate di tali enti rispetto ad un punto di cui sono funzioni e le rappresenta collo stesso simbolo (operatore) leibniziano, ne mostra le proprietà fondamentali ed il loro immenso campo fecondo delle più svariate applicazioni. Tutti gli operatori già introdotti nella scienza da Maxwell e Lorentz in modo più o meno artificioso, ed altri nuovi (gradiente e rotore di una omografi) vengono definiti in modo semplice, autonomo, per mezzo di un unico operatore omografico (derivata di numero, punto, vettore rispetto ad un a punto) raggiungendosi così, con mezzi minimi, una unità, una perspicuità veramente ammirevole.»[52]

A Burali-Forti si deve lo sviluppo della parte teorica:

> «Burali si occupò della parte teorica generale; io immediatamente delle applicazioni le quali, a loro volta, dovevano guidare e disciplinare la prima. Sebbene in forma molto concisa, questo nuovo volumetto [*Omografie vettoriali*] contiene le cose più indispensabili della teoria e degli operatori omografici fondamentali, le loro

[51] Spazio vettoriale.

[52] Marcolongo, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185, 183-184.

> più belle applicazioni con piena adozione delle geniali idee di R. Hamilton e G. Peano.»[53]

Anche le numerose pubblicazioni di C. Burali-Forti in argomento testimoniano il suo lavoro prevalentemente diretto alla progressiva introduzione e perfezionamento di nuovi simboli e operatori.

Dai volumi del 1909 si passa poi a quelli del 1912-13 e poi a quelli del 1929-30:

> «Le ricerche originate da queste nostre opere, la collaborazione di altri matematici italiani e stranieri resero necessaria una nuova edizione delle omografie e così nacque la prima serie purtroppo interrotta dalla guerra, della *Analyse vectorielle générale*, [...], del 1912, in cui la teoria delle trasformazioni lineari, dei loro operatori e le loro applicazioni ricevettero in quei due volumi, la loro forma più semplice e pressoché definitiva. Il terzo volume della collana fu composto dal compianto Prof. Bottasso e tratta della Astatica; poi non fu più potuta continuare e non fu ripresa che nel 1929 dall'editori Zanichelli, [...], collo stesso titolo di Analisi vettoriale generale; quello delle trasformazioni lineari col quale essa s'inizia, è dovuto al Burali ed a me; e fu seguito da altri tre volumi, contenenti le applicazioni alla geom. diff., alla elasticità, agli spazi curvi, scritti dai Prof. Boggio, Burgatti e Burali.»[54]

Marcolongo fa riferimento alla voluminosa corrispondenza avuta con Burali-Forti:

> «La lunga e voluminosa corrispondenza avuta col Burali per quasi un ventennio e che io gelosamente conservo, può dare appena una idea dell'immenso lavoro compiuto e della parte che in questa costruzione, non priva di lotte e di difficoltà, spetta a ciascuno di noi.»[55]

E conclude facendo riferimento all'uso corrente dei metodi di Burali-Forti e Marcolongo, indicando fra i continuatori lo stesso Levi-Civita:

> «I nostri metodi non sono oramai più in discussione e sono di uso corrente in tutti i corsi di Meccanica e di Fisica-matematica.

[53]Cfr. Marcolongo, Roberto, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M., 1935.
[54]Cfr. Ibidem nota precedente.
[55]Cfr. Ibidem nota precedente.

> Per la nostra opera e per quella dei nostri continuatori tra i quali basti nominare Boggio, Burgatti, Bottasso, Cisotti, Lazzarino, Signorini, Amaldi, Levi-Civita (pel loro grande trattato) ecc., essi hanno portato buoni frutti alla scienza ed all'insegnamento.»[56]

2.9 Le onorificenze ricevute e la morte

C. Burali-Forti fu insignito della medaglia dell'Ordine della Corona d'Italia e, nel 1926, di quella dei S.S. Maurizio e Lazzaro (Ordine Mauriziano), seconda per importanza in Italia dopo quella dell'Annunziata, dal Ministero della guerra.

Non appartenne a nessuna Accademia.

Morí nell'Ospedale Mauriziano di Torino il 21 gennaio 1931, chiedendo di non ricevere funerali religiosi. Era stato ricoverato l'8 novembre dell'anno precedente affetto da carcinoma dello stomaco.

Comparvero note necrologiche sui giornali *La stampa* del 22 sera e del 23 gennaio mattina[57] e sulla *Gazzetta del popolo* del 24 gennaio.

Roiportiamo ancora qualche commento di Marcolongo sul carattere «particolare» di Burali-Forti:

> L'opera scientifica non si svolse sempre serena e pacifica. le critiche aspre (inglesi e americane dei quaternionisti e dei seguaci

[56] Cfr. Ibidem nota precedente.

[57] «La morte del prof. Burali-Forti. L'altro giorno, dopo lunghe sofferenze, decedeva all'ospedale Mauriziano il prof. cav. uff. Cesare Burali-Forti, insigne matematico. Da 44 anni il prof. Burali-Forti dedicava la sua valente ed apprezzata opera di insegnante alla R. Accademia di artiglieria e genio, preparando allo studio profondo delle scienze matematiche i giovani allievi che intraprendevano la carriera militare nelle Armi dell'artiglieria e del genio. Tutti gli ufficiali di tali Armi, fra i quali sono i sommi Capi militari, appresero dal prof. Burali-Forti quegli insegnamenti che valsero a dare all'Esercito vittorioso indimenticabili personalità di combattenti e condottieri. I funerali, svoltisi ieri in forma puramente civile partendo dall'Ospedale Mauriziano, furono nuova manifestazione del largo compianto. Col figlio ing. Umberto e gli altri parenti seguivano il feretro, ricoperto di grandi corone, il generale Calcagno, comandante dell'Accademia e della Scuola d'applicazione; il colonnello Gamerra, comandante della Scuola; il colonnello Lussiana, comandante dell'Accademia; il capitano Tromby, aiutante maggiore del Comando generale; il console Parenzo della Milizia; il prof. Alberto Badini Confalonieri; il prof Krauterkraft ed altri insegnanti civili e militari dei due Istituti; gli allievi dell'Accademia Militare, il senatore Bouvier, molti ufficiali d'artiglieria e del genio, numerose rappresentanze scolastiche. Il corteo sostava nel largo di corso Peschiera, ove dava alla salma l'estremo saluto il prof. Colombo, ricordando le virtù e le benemerenze dell'egregio matematico, la cui salma era poi accompagnata sino al Cimitero dai più intimi familiari e da alcune rappresentanze.»

> dell'opera di Gibbs) e le adesioni si succedettero per vari anni sulle ospitali pagine dell'«Enseignement» del benemerito Fehr; ma il Burali, sempre intransigente sapeva rispondere in modo secco, quasi violento. Ed io lo sostenni cercando la forma più mite, smussando gli angoli e le asperità, cercando conciliare la logica ferrea con vedute meno rigide e più eclettiche.

Fa anche riferimento alla difficoltà provocate dalla differenza di vedute in relazione alla relatività:[58]

> «Una sola volta parve compromessa la pace e la solidità del binomio vettoriale, come scherzosamente gli amici chiamavano la nostra collaborazione e fu a proposito della Relatività. Non fu possibile metterci d'accordo, prima sulla nuova estensione da dare ai metodi vettoriali; poi e ancora più profondamente, sull'essenza di tutta la teoria. Malgrado l'interesse che Egli provava per tutte le questioni fisiche moderne e per quelle soprattutto di alto ed avvincente interesse filosofico, restò tenacemente ligio ai sistemi classici e nell'attacco e nella difesa non seppe forse mantenersi sereno ed obbiettivo. Le discussioni vivaci, condotte con foga tutta meridionale, appena sufficiente ad arginare i frizzi e le arguzie del caustico aretino, sulle nuove possibili estensioni del calcolo vettoriale ed omografico alle matrici, in relazione a modernissime teorie fisiche, pareva lo convincessero; ma poi, forse per gli assalti del male che pochi mesi dopo dovevano atterrarlo, ritornava al suo primo stato di diffidenza e di cauta aspettazione.»[59]

Dal punto di vista personale Marcolongo lo definisce:

> «... arguto e terribilmente caustico! Polemista temibilissimo, vero cavaliere senza paura e senza macchia, non si preoccupava dove e a chi fossero diretti i suoi colpi; tanto che, chi non lo avesse mai avvicinato, si faceva uno strano ed errato concetto dell'intrattabilità del suo carattere. E invece io non ho mai conosciuto un animo più buono e dal tratto così squisitamente signorile, di poche parole, ma dalla conversazione fine, arguta e dotta. Bastava

[58]Marcolongo pubblicherà nel 1921 la sua prima edizione del *Relatività* con una seconda edizione del 1923: MARCOLONGO, Roberto, *Relatività, seconda edizione*, Messina, Principato, 1923, usando il formalismo del calcolo differenziale assoluto di G. Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita, mentre Burali-Forti pubblicherà, come abbiamo detto, nel 1924 insieme a T. Boggio l'acceso pamphlet: BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*, Torino, STEN, 1924.

[59]Cfr. MARCOLONGO, Roberto, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M., 1935.

avvicinarlo per apprezzarne la cultura, per vedere qual tempra di uomo del vecchio stampo Egli fosse; vederlo nell'intimo del suo ambiente familiare, intenderlo squisito interprete ed ammiratore appassionato della musica dei nostri grandi maestri, di Bach e di Beethoven. E in questa sana intimità certe sue idee, in fondo non del tutto ingiuste e che subivano strane deformazioni per l'estremo limite cui soleva spingerle il suo spirito paradossale e financo la sua fobia per le coordinate –così scherzosamente io soleva definirla– si attutivano nel parlare e nel conversare franco e libero. Bisognava lasciarlo un po' dire e andare innazi, certi di apprender sempre qualche cosa da lui che vedeva il lato bello e il debole in ogni questione; certi che avrebbe compiuta l'opera cui aveva dedicato la parte migliore della sua vita operosissima.»[60]

[60] Marcolongo, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185, 185.

2.10 Appendice: Elenco delle pubblicazioni di C. Burali-Forti

1886a Burali-Forti, Cesare, *Sopra alcuni problemi di assicurazioni sulla vita*, Arezzo, Belletti, 1886.

1886b Burali-Forti, Cesare, «Sui sistemi di coniche», *Giornale di Matematiche (Battaglini)*, 24 (1886), 309-333.

1886c Burali-Forti, Cesare, «Sistemi i-volte infiniti di quadriche», *Giornale di Matematiche (Battaglini)*, 24 (1886), 334-345.

1888 Burali-Forti, Cesare, *Elementi sulla teorica delle funzioni circolari ed applicazioni alla trigonometria piana e sferica*, Bologna, Zanichelli, 1888.

1889a Burali-Forti, Cesare, «Sopra un sistema di curve che dividono in n parti eguali gli archi di circolo che passano per due punti fissi», *Giornale di Matematiche (Battaglini)*, 27 (1889), 153-163.

1889b Burali-Forti, Cesare, *Applicazioni della geometria projettiva. Gnomonica grafica*, Torino, Loescher, 1889.

1890a Burali-Forti, Cesare, «Le linee isofote delle rigate algebriche», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4 (1890), 57-62.

1890b Burali-Forti, Cesare, «Sopra il sistema di quadriche che hanno l'n-pla polare comune», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 4 (1890), 118-125.

1890c Burali-Forti, Cesare, *Applicazioni della geometria descrittiva e proiettiva: lezioni per gli allievi della Reale Accademia Militare del Dottor Cesare Burali-Forti*, Torino, Candeletti, 1890.

1891a Burali-Forti, Cesare, «Sulle trasformazioni 2,2 che si possono ottenere mediante due trasformazioni doppie», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 5 (1891), 91-99.

1891b Burali-Forti, Cesare, «Recensione di: G. Testi, Elementi di geometria», *Rivista di Matematica*, 1 (1891), 14-17.

1891c Burali-Forti, Cesare, «La risoluzione dei problemi di aritmetica nella scuole secondarie inferiori», *Rivista di Matematica*, 1 (1891), 31-41.

1891d Burali-Forti, Cesare, «Osservazioni al "Trattato di aritmetica di C. Bertrand"», *Rivista di Matematica*, 1 (1891), 85-87.

1891e Burali-Forti, Cesare, «Recensione di: S. Pincherle, Sopra una recensione agli Elementi di Aritmetica», *Rivista di Matematica*, I (1891), 120-121.

1892a Burali-Forti, Cesare, *Aritmetica razionale per gli istituti tecnici*, Torino, Petrini, 1892.

1892b Burali-Forti, Cesare, «Sul trattato di Aritmetica Razionale del Dott. G. M. Testi», *Rivista di Matematica*, 2 (1892), 2-6.

1892c Burali-Forti, Cesare, «Recensione di: Oskar Schlömich, Elementi di geometria metrica», *Rivista di Matematica*, 2 (1892), 18-19.

1892d Burali-Forti, Cesare, «Sopra un metodo generale di costruzioni in geometria descrittiva», *Rivista di Matematica*, 2 (1892), 96-99.

1892e Burali-Forti, Cesare, «Recensione di: E. Sadun e C. Soschino, Lezioni di Aritmetica. Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari», *Rivista di Matematica*, 2 (1892), 191-192.

1893a Burali-Forti, Cesare, «Recesione di: Giovanni Biasi, Elementi di Aritmetica e Algebra, esposti con metodo sintetico», *Rivista di Matematica*, 3 (1893), 40-43.

1893b Burali-Forti, Cesare, «Sulla raccolta di formule», *Rivista di Matematica*, 3 (1893), 75.

1893c Burali-Forti, Cesare, «Sulla teoria delle grandezze», *Rivista di Matematica*, 3 (1893), 76-101.

1893d Burali-Forti, Cesare, «I numeri negativi», *Rivista di Matematica*, 3 (1893), 138-145.

1893-94 Burali-Forti, Cesare, «Sulle classi derivate a destra e a sinistra», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 29 (1893-1894), 382-394.

1894a Burali-Forti, Cesare, *Logica matematica*, Milano, Hoepli, 1894.

1894b Burali-Forti, Cesare, «Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 8 (1894), 169-179.

1894-95 Burali-Forti, Cesare, «Sul limite delle classi variabili», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 30 (1894-1895), 227-243.

1896a Burali-Forti, Cesare, «Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable», *Mathematische Annalen*, 47 (1896), 20-32.

1896b BURALI-FORTI, Cesare, «Sur la définition de l'intégrale définie», *Nouvelles Annales de Mathématiques*, III 15 (1896), 495-502.

1896c BURALI-FORTI, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 10 (1896), 177-195.

1896d BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, «Le classi finite», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 32 (1896), 34-52.

1896-99 BURALI-FORTI, Cesare, «Les proprietés formales des opérations algébriques», *Revue de Mathématiques*, 6 (1896-1899), 141-177.

1896-97a BURALI-FORTI, Cesare, «Le classi finite», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 32 (1896-1897), 34-52.

1896-97a BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra un teorema del sig. G. Cantor», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 32 (1896-1897), 229-237.

1897a BURALI-FORTI, Cesare, *Note scientifiche e critiche alle Lezioni di aritmetica pratica*, Torino, Petrini, 1897.

1897b BURALI-FORTI, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 64-82.

1897c BURALI-FORTI, Cesare, «Una questione sui numeri transfiniti», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 154-164.

1897d BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle classi ben ordinate», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 260.

1897e BURALI-FORTI, Cesare, *Lezioni di Aritmetica pratica ad uso delle scuole secondarie inferiori*, Torino, Petrini, 1897.

1897f BURALI-FORTI, Cesare, *Note scientifiche e critiche alle Lezioni di aritmetica pratica*, Torino, Petrini, 1897.

1897g BURALI-FORTI, Cesare, «Postulats pour la géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky», *Verhandlungen des ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9 bis 11 August 1897, Leipzig, Teubner*, 1 (1897), 247-250.

1897h BURALI-FORTI, Cesare, *Lezioni d'aritmetica pratica*, Torino, Petrini, 1897.

1897h BURALI-FORTI, Cesare, «Sulla questione XI», *Bollettino dell'Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle Scuole Medie*, 2 (1897-1898), 126-129.

1898a Burali-Forti, Cesare, «Sopra alcune questioni di geometria differenziale», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 12 (1898), 111-132.

1898b Burali-Forti, Cesare, *Elementi di algebra*, Torino, Bona, 1898.

1898c Burali-Forti, Cesare & Ramorino, Angelo, *Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari*, Torino, Gallizio, 1898.

1898d Burali-Forti, Cesare & Ramorino, Angelo, *Elementi di Aritmetica Razionale ad uso della 3a classe della Scuola Tecnica*, Torino, Petrini, 1898.

1898e Burali-Forti, Cesare, «[Risposta alla recensione di C. Pacchiani al testo di Burali-Forti, Ramorino, Aritmetica e norme per l'insegnamento nelle scuole elementari]», *Periodico di Matematica*, 13 (1898), 230-231.

1899a Burali-Forti, Cesare, «Sur les rotations», *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, II, 23 (1899), 82-92.

1899b Burali-Forti, Cesare, «Sur l'égalité et sur l'introduction des éléments dérivés dans la science», *L'Enseignement Mathématique*, 1 (1899), 246-261.

1899c Burali-Forti, Cesare, «Les propriétés formales des opérations algébriques», *Revue de Mathématiques*, 6 (1899), 141-177.

1900a Burali-Forti, Cesare, «Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques», *(Schlömilch), Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 45 (1900), 52-54.

1900b Burali-Forti, Cesare, «Sui simboli di logica matematica (I)», *Il Pitagora*, 6 (1900), 1-5.

1900c Burali-Forti, Cesare, «Sui simboli di logica matematica (II)», *Il Pitagora*, 6 (1900), 65-70.

1900d Burali-Forti, Cesare, «Sui simboli di logica matematica (III)», *Il Pitagora*, 6 (1900), 130-136.

1900e Burali-Forti, Cesare, «Risposta alla domanda n° 1633)», *L'Intermediaire des Mathématiciens*, 7 (1900), 38.

1900f Burali-Forti, Cesare, «Risposta alla domanda n° 1637)», *L'Intermediaire des Mathématiciens*, 7 (1900), 245-246.

1900g Burali-Forti, Cesare, «Domanda n° 1988)», *L'Intermediaire des Mathématiciens*, 7 (1900), 405.

1900-01 Burali-Forti, Cesare, «Sopra alcuni punti singolari della curve piane e gobbe», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 36 (1900-1901), 935-938.

1901a Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15 (1901), 310-320.

1901b Burali-Forti, Cesare, *Lezioni di aritmetica pratica. Seconda edizione*, Torino, Petrini, 1901.

1901c Burali-Forti, Cesare, «Applicazioni del metodo di Grassmann», *Le Matematiche pure ed applicate: Periodico mensile di matematiche pure ed applicate superiori ed elementari, Città di Castello*, 1 (1901), 269-278.

1901-02a Burali-Forti, Cesare, «Le formule di Frenet per le superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 37 (1901-1902), 233-246.

1901-02b Burali-Forti, Cesare, «Ingranaggi piani», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 37 (1901-1902), 393-413.

1902a Burali-Forti, Cesare, «Sulle radiali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 16 (1902), 185-191.

1902b Burali-Forti, Cesare, «Antwort auf eine Frage des Herrn E. N. Barisien im Intermédiaire des Mathématiciens», *Archive der Mathematik und Physik*, 3,4 (1902), 181-184.

1902c Burali-Forti, Cesare, «Sulle linee funicolari», *Le Matematiche pure ed applicate: Periodico mensile di matematiche pure ed applicate superiori ed elementari, Città di Castello*, 2 (1902), 184-186.

1902-03 Burali-Forti, Cesare, «Sul moto di un corpo rigido», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 38 (1902-1903), 155-170.

1903a Burali-Forti, Cesare, «I vettori nella geometria elementare», *Il Pitagora*, 9 (1903), 65-82.

1903b Burali-Forti, Cesare, «I vettori nella geometria elementare (cont.)», *Il Pitagora*, 9 (1903), 113-122.

1903-04 Burali-Forti, Cesare, «Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 39 (1903-1904), 256-272.

1904a Burali-Forti, Cesare, *Lezioni di aritmetica pratica. Terza edizione*, Torino, Petrini, 1904.

1904b Burali-Forti, Cesare, *Lezioni di geometria metrico-proiettiva*, Torino, Bocca, 1904.

1904c BURALI-FORTI, Cesare, «S. Catania, Aritmetica razionale ad uso delle scuole secondarie superiori», *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*, 7 (1904), 91.

1905 BURALI-FORTI, Cesare, *L'integrafo di Abelank-Abokanowicz*, Torino, Società Editrice Politecnica, 1905.

1905-06 BURALI-FORTI, Cesare, «Sulla curva delle probabilità», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 35 (1905-1906), 155-157.

1906 BURALI-FORTI, Cesare, «Sui principii della meccanica», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22 (1906), 152-160.

1905-06 BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1905-1906), 100-120.

1907a BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1907), 417-426.

1907b BURALI-FORTI, Cesare, *Lezioni di aritmetica pratica. Quarta edizione*, Torino, Petrini, 1907.

1907c BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 23 (1907), 324-328.

1907d BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 65-80.

1907e BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 318-332.

1907f BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Nuovo Cimento*, 5, 13 (1907), 488-493.

1907-08a BURALI-FORTI, Cesare, «Funzioni vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 43 (1907-1908), 13-24.

1907-08b BURALI-FORTI, Cesare, «I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 43 (1907-1908), 1146-1164.

1908a BURALI-FORTI, Cesare, «L'importance des transformations linéaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général», *L'Enseignement Mathématique*, 10 (1908), 411-417.

1908b BURALI-FORTI, Cesare, *Corso di geometria analitico-proiettiva*, Torino, Petrini, 1908.

1908c BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25 (1908), 352-375.

1908d BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 26 (1908), 369-377.

1908e BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Notations rationelles pour le système vectoriel minimum*, Turin, Bona, 1908.

1909a BURALI-FORTI, Cesare, «Démonstration vectoriel d'une construction des axes d'un ellipse», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 301-302.

1909b BURALI-FORTI, Cesare, «Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 50-55.

1909c BURALI-FORTI, Cesare, «Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 238-241.

1909d BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Bologna, Zanichelli, 1909.

1909e BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica*, Torino, Petrini, 1909.

1909f BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Notations rationelles pour le système vectoriel minimum», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 41-45.

1909g BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Réponse a Combebiac», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 134.

1909h BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Réponse à Timerding et Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 459-466.

1909-10a BURALI-FORTI, Cesare, «Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 45 (1909-1910), 4-22.

1909-10b Burali-Forti, Cesare, «Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 45 (1909-1910), 388-400.

1909-10c Burali-Forti, Cesare, «Sulla rappresentazione sferica di Gauss», *Atti dell'Istituto Veneto*, 69 (1909-1910), 693-723.

1910a Burali-Forti, Cesare, *Lezioni di aritmetica pratica. Quinta edizione*, Torino, Petrini, 1910.

1910b Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elements de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la geometrie, à la mecanique et à la physique-mathématique*, Paris, Hermann, 1910.

1910c Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Réponse à Carvallo, Cargill-Knott e Macfarlane», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 46-54.

1910-11a Burali-Forti, Cesare, «Alcune applicazioni alla geometria differenziale su di una superficie dell'operatore omografico C», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 46 (1910-1911), 461-481.

1910-11b Burali-Forti, Cesare, «Sopra una formula generale per la trasformazione di integrali di omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 46 (1910-1911), 745-765.

1911a Burali-Forti, Cesare, «Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 10-16.

1911b Burali-Forti, Cesare, «Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 641-648.

1911c Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «A proposito dell'articolo di G. Aguglia: I quaternioni (I)», *Bollettino di Matematica*, 10 (1911), 192-194.

1911d Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «À propos d'un article de M. E. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 13 (1911), 138-148.

1911-12 Burali-Forti, Cesare, «Sul moto composto», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 47 (1911-1912), 261-265.

1912a Burali-Forti, Cesare, «Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale assoluto», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33 (1912), 1-40.

1912b BURALI-FORTI, Cesare, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva*, Torino, Petrini, 1912.
1912c BURALI-FORTI, Cesare, «Gli enti astratti definiti come enti relativi ad un campo di nozioni», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 21 (1912), 677-682.
1912d BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les dyads et les dyadics de Gibbs», *L'Enseignement Mathématique*, 14 (1912), 276-282.
1912e BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «A proposito dell'articolo di G. Aguglia: I quaternioni (II)», *Bollettino di Matematica*, 11 (1912), 188-189.
1912f BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analyse vectorielle générale: I, Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.
1913a BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les lois générales de l'algorithme des symboles de fonction et d'operation», *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge 22-28 August 1912*, 2 (1913), 480-491.
1913b BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcuni operatori lineari vettoriali», *Atti dell'Istituto Veneto*, 72 [8 15] (1913), 265-276.
1913c BURALI-FORTI, Cesare, «Questioni sulle forme geometriche di Grassmann-Peano», *Il Pitagora*, 20 (1913), 15-17.
1913d BURALI-FORTI, Cesare, *Lezioni di aritmetica pratica. Sesta edizione*, Torino, Petrini, 1913.
1913e BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analyse vectorielle générale: II, Applications à la mécanique et à la physique*, Pavia, Mattei, 1913.
1914a BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcune superficie rigate dipendenti dalle indicatrici sferiche di una curva gobba», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 23 (2) (1914), 201-208.
1914b BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcune omografie determinate da formazioni geometriche di seconda specie», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 23 (2) (318-323), 1914.
1914c BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Analyse vectorielle générale», *Isis*, 5, Tome II, Fasc. 1 (1914), 174-182.
1914-15 BURALI-FORTI, Cesare, «Nuove applicazioni degli operatori», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 50 (1914-1915), 669-684.

1915 BURALI-FORTI, Cesare, «I numeri reali definiti come operatori per le grandezze», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 24 (1915), 489-496.

1916a BURALI-FORTI, Cesare, «Sugli assintoti e piani assintotici di una linea», *Giornale di matematiche (Battaglini)*, 54 (1916), 249-278.

1916b BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcuni baricentri di linee, aree, volumi», *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 49 (1916), 23 p.

19016c BURALI-FORTI, Cesare, «Sulla definizione di coppie, terne, ecc.», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (1) (1916), 405-413.

1916d BURALI-FORTI, Cesare, «Ancora sulla definizione di coppie, terne, ecc.», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (2) (1916), 206-207.

1916e BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle derivate delle isomerie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (1) (1916), 709-716.

1916f BURALI-FORTI, Cesare, «Sugli operatori differenziali omografici», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (2) (1916), 51-59.

1916-17 BURALI-FORTI, Cesare, «Equivalenti omografiche delle formule di Frenet. Linee e superficie parallele», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 52 (1916-1917), 834-846.

1917a BURALI-FORTI, Cesare, «Alcuni sistemi di linee su di una superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 53 (1917-1918), 111-123.

1917b BURALI-FORTI, Cesare, «I moti relativi nel calcolo assoluto», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 26 (1) (1917), 596-602.

1917c BURALI-FORTI, Cesare, «I moti relativi nel calcolo assoluto», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 26 (1) (1917), 632-637.

1917-18a BURALI-FORTI, Cesare, «Alcuni sistemi di linee su di una superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 53 (1917-1918), 111-123.

1917-18b BURALI-FORTI, Cesare, «Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 53 (1917-1918), 347-358.

1918a BURALI-FORTI, Cesare, «Traiettorie ortogonali di un sistema di superficie sferiche», *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 2 51 (1918), 899-908.

1918b BURALI-FORTI, Cesare, «Differenziali esatti», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 27 (1) (1918), 92-96.

1918c BURALI-FORTI, Cesare, «Alcune linee e superficie collegate con una linea gobba», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 27 (1) (1918), 109-112.

1918d BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle superficie rigate», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 27 (1) (1918), 283-287.

1919a BURALI-FORTI, Cesare, *Logica matematica, Seconda edizione*, Milano, Hoepli, 1919.

1919b BURALI-FORTI, Cesare, «Classe derivata di una funzione», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 28 (1) (1919), 63-65.

1919c BURALI-FORTI, Cesare, «Definizione geometrica di linea, superficie, solido», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 28 (1) (1919), 253-256.

1919d BURALI-FORTI, Cesare, *Fondamenti per la geometria del triangolo*, Palermo, Capozzi, 1919.

1921a BURALI-FORTI, Cesare, «Sui numeri reali e le grandezze. (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 30 (1) (1921), 175-177.

1921b BURALI-FORTI, Cesare, «Sui numeri reali e le grandezze. (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 30 (2) (1921), 26-28.

1921c BURALI-FORTI, Cesare, «Applicazione del teorema di Guldino», *Bollettino di Matematica*, 1 (1921), 2 p..

1921d BURALI-FORTI, Cesare, «Costruzione di un triangolo», *Bollettino di Matematica*, 1 (1921), 3 p..

1921e BURALI-FORTI, Cesare, *Geometria descrittiva,* Vol 1*: Assonometria.* Vol 2*: Projezione quotata, projezione Monge, prospettiva*, Torino, Lattes, 1921-1922.

1921f BURALI-FORTI, Cesare, «Polemica logico-matematica. C. Burali-Forti e F. Enriques», *Periodico di matematiche*, 4 (1921), 354-359.

1921g BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, *Meccanica razionale*, Torino, Lattes, 1921.

1921h Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria alla meccanica e alla fisica matematica. 2 ediz.*, Bologna, Zanichelli, 1921.

1921i Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Corso di matematica per il secondo biennio degli istituti tecnici*, Napoli, Perella, 1921.

1921-22 Burali-Forti, Cesare, «Operatori per le iperomografie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 57 (1921-1922), 285-292.

1922a Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 73-76.

1922b Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 181-184.

1922 Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, «Moti relativi e pendolo di Foucault», *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 55 (1922), 310-317.

1922-23 Burali-Forti, Cesare, «Flessione dei raggi luminosi stellari e spostamento secolare del perielio di Mercurio», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 58 (1922-1923), 149-151.

1923a Burali-Forti, Cesare, «Trattrici e catenaria relative ad una linea», *Esercitazioni Matematiche: Circolo Matematico di Catania*, 4 (1923), 1-6.

1923b Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Corso di matematica.* Vol II*: Geometria*, Napoli, 1923.

1923-24 Burali-Forti, Cesare, «Sulla definizione della eguaglianza», *Bollettino di Matematica*, 19 (1923-1934), 110-113.

1924 Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*, Torino, STEN, 1924.

1925a Burali-Forti, Cesare, «Stato cinetico, moto infinitesimo, teorema di Coriolis», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 60 (1925), 171-177.

1925b Burali-Forti, Cesare, «Estensione all'iperbole di alcune proprietà dell'ellisse», *Bollettino di Matematica*, 2 (3) (1925), 123-124.

1925c Burali-Forti, Cesare, «A proposito di una lettera di Mario Pieri», *Bollettino di Matematica*, 2 (4) (1925), 136-137.

1925d BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, «Osservazioni sopra un articolo del Prof. P. Straneo», *Il Bollettino di Matematica*, 4 (1925), LXVII-LXVIII.

1926 BURALI-FORTI, Cesare, *Geometria analitico proiettiva, Seconda edizione*, Torino, Petrini, 1926.

1928 BURALI-FORTI, Cesare, «Una questione sui veli elastici», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, VI, 8 (1928), 549-551.

1928-29 BURALI-FORTI, Cesare, «Una prima questione di balistica esterna», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 64 (1928-1929), 146-158.

1929a BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elementi di trigonometria: ad uso degli istituti medi superiori e degli istituti industriali*, Napoli, Perella, 1929.

1929b BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analisi vettoriale generale e applicazioni.* Vol I*: Trasformazioni lineari, seconda edizione*, Bologna, Zanichelli, 1929.

1930 BURGATTI, Pietro, BOGGIO, Tommaso & BURALI-FORTI, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930.

1932 BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, *Esercizi di algebra*, Torino, Petrini, 1932.

1938 BURALI-FORTI, Cesare, «Elementi di calcolo vettoriale», *Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi*, 2 (2) (1938), Milano, Hoepli, 105-119.

1948 BURALI-FORTI, Cesare & BOGGIO, Tommaso, *Esercizi di matematica: algebra, geometria, funzioni circolari: 1948 esercizi, figure*, Torino, Petrini, 1934.

2.11 Appendice: Carteggio inedito fra C. Burali-Forti a G. Vailati

Il carteggio[61] che qui presentiamo è costituito da undici lettere di Cesare Burali-Forti a Giovanni Vailati (1863-1909) che ricoprono l'arco temporale dal 1894 al 1908. Fra queste ce n'è anche una dodicesima, che non riteniamo attribuibile a Burali-Forti, sia per i contenuti sia per la diversità di grafia.

Le carte e i libri di Cesare Burali-Forti sono purtroppo andati dispersi a causa dei continui traslochi della famiglia in Italia e all'estero, come ci è stato riferito dai nipoti, i quali conservano soltanto un volume dell'*Aritmetica*.

Tre aspetti fondamentali della biografia di Burali-Forti emergono da questo carteggio: il primo legato all'impegno nei confronti della scuola secondaria; il secondo ai suoi studi relativi alla teoria delle grandezze e delle proporzioni[62] ed il terzo connesso al problema dell'unificazione delle notazioni vettoriali.

Burali-Forti membro attivo dell'Associazione Mathesis, di cui è eletto vicepresidente nel 1894, decide di abbandonarla, quando su iniziativa di G. Lazzeri si propone di aprire questa associazione ai docenti universitari. Dalla corrispondenza emerge inoltre un episodio connesso all'adozione nelle scuole del libro di testo dell'Aritmetica di Burali-Forti, che vide numerose ristampe. Burali-Forti chiede l'aiuto di Vailati che, risiedendo a Roma per svolgere i lavori relativi alla Commissione Reale per l'insegnamento secondario[63], spera possa intercedere a suo favore con gli organi ministeriali.

1. C. Burali-Forti a G. Vailati, 22. 9. 1894
BF Mi, Lettera XD

Arezzo 22. 9. 94

Carissimo Professore,

Ho ricevuto ieri, mandatami da Peano, una copia della sua recensione alla mia Logica Matematica.[64]

[61]Le lettere sono conservate presso la Biblioteca di Filosofia del Dipartimento di Filosofia dell'Università di Milano: Fondo Vailati, Titolo I, Lettere di Cesare Burali-Forti, Cartella 2, Fascicolo 26. Abbreviazione BF Mi. Nella trascrizione si è trascritto in corsivo ciò che era sottolineato e in grassetto le parole con due sottolineature.

[62]Cfr. Burali-Forti, Cesare, «Sulla teoria delle grandezze», *Rivista di Matematica*, 3 (1893), 76-101.

[63]Cfr. Giacardi, Livia, «Matematica e Humanitas scientifica. Il Progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati», *Bollettino UMI*, Sez. A (2001), 317-352.

[64]Cfr. Vailati, Giovanni, «Recensione: C. Burali-Forti, *Logica Matematica*», *Rivista di Matematica*, 4 (1894), 143-146.

Non so davvero come ringraziarla, per aver messo, e con forma sì accurata, in ottima luce i pochi meriti che può avere il mio lavoro. Esponendo le varie parti del mio libro, Ella ha reso perfettamente le mie idee, e accennate specialmente quelle parti che, anche secondo la mia intenzione, dovevano riuscire le meno ordinarie. Ciò da una parte mi lusinga di non essere riuscito troppo scuro nel mio lavoro. Però Ella avrà qualche osservazione, che cortesemente non ha voluto indicare nella recensione. Le sarò grato se vorrà indicarmi quelle cose nelle quali, o per una ragione o per un'altra, dissenta dalla mia opinione, desiderando veramente tenerne conto per una seconda edizione, che anche questa veramente desidero prossima[65], sia perché ciò sarebbe una soddisfazione morale per me, sia perché ciò proverebbe aver la Logica Matematica preso quello sviluppo e quella importanza che principalmente il *mio padre Peano* ha diritto di aspettare.

Come saprà al congresso di Caen è stata favorevolmente accolta, per opera del Sig. Laisant che se ne è attivamente occupato come di cosa sua.

Ai primi di ottobre sarò a Torino. Conto di avere o a voce o per iscritto tutte le osservazioni che crederà opportune sul mio lavoro, certo di poter così migliorare la seconda (*prossima* o *remota*, che sia) edizione.

Di nuovo tante grazie e mi creda suo affezionatissimo

Burali

2. C. Burali-Forti a G. Vailati, 2. 5. 1906
BF Mi, Lettera CDLXXXVIII

Torino 2. 5. 06

Carissimo Vailati,

Ti mando le risposte al questionario, per la matematica, della Com. Reale ... Dal modo come sono formulate le domande (credo tue ?) mi pare che nelle linee generali siamo d'accordo. Forse non lo saremo sulla 10ª. Immagina però un trattato di Geom. senza proporzioni e vedrai qual semplicità acquista. Del resto è questione di seguire il criterio di non introdurre nomi nuovi senza assoluta necessità (*concetti* nuovi, *brevità*): allora data l'algebra spariscono le proporzioni.

Credo che mandare a te le risposte equivalga ad un invio ufficiale: nel caso mi fai piacere di avvertirmi.

Saluta Vacca da parte mia.

Tanti saluti dal tuo aff.mo

[65] La seconda edizione del libro vedrà la luce nel 1919 completamente rifatta e ampliata (483 p.): Cfr. Burali-Forti, Cesare, *Logica matematica, Seconda edizione*, Milano, Hoepli, 1919.

Burali

BF Mi, Allegato XDIII

-.Matematica.-

1. Le definizioni debbono esser *poche* e *precise*, e date al solo scopo di *abbreviare* **realmente** *il linguaggio*. In tal modo una grandissima parte della nomenclatura matematica sparisce; le *idee* rimangono tutte e, anzi, trovandosi più al largo fruttificano meglio.

   Opportunissimo abolire ogni regola che riduce l'alunno ad una macchina incosciente: si devono solo saper applicare i procedimenti per l'effettuazione pratica delle operazioni fondamentali.

   Dare somma importanza alla risoluzione dei problemi pratici, perché in essi compariscono le *grandezze*: ed è precisamente il calcolo delle grandezze che fa riconoscere, anche ai giovani, l'importanza e l'utilità pratica del calcolo numerico. Questo fatto a parte è solo strumento di tortura.

2. *Scuola universitaria di magistero*, affinché il futuro prof. veda nettamente l'origine logica degli enti numeri, e conoscendoli così sotto la loro forma più semplice, possa liberare la scuola secondaria da un esercizio nel vuoto.

3. —

4. In parti eguali: importantissime anche le applicazioni del teor. di Pitagora, la similitudine e le aree, volumi, ecc.

5. Esigere che si parta da proprietà complesse, ma facilmente verificabili graficamente, per ottenere rapidamente, con deduzione, altre proprietà importanti. In altri termini abolire i sistemi minimi di idee primitive e di postulati (importantissimi scientificamente e per la preparazione didattica) che riducono al minimo la capacità intellettuale degli alunni.

6. —

7. Convenientissimo. Rendere obbligatorio tale procedimento, o, il che equivale, proibire la nomenclatura algebrica: sparita questa rimane l'algebra.

8. La *fusione* in geometria non corrisponde ad un concetto scientifico e quindi ogni opinione rimane opinione. È però nata la *fusione*, in aritm., degli interi con i fratti. Questa deve condannarsi perché: non esiste definizione scientifica (o pratica) di frazione senza passar prima per gli interi: le operazioni sulle frazioni non si possono eseguire se non si sanno eseguire quelle sugli interi.

9. Posto principale. I fondamenti tutti in un anno (vedi n° 18); negli anni successivi continuare le applicazioni che sono numerose, importanti e divertenti.

10. Per Euclide «*proporzione* = eguaglianza di due rapporti»: rapporto supplisce alla mancanza del concetto generale di numero reale (positivo, Q_0). Noi che *abbiamo* i numeri e che *dobbiamo adoperarli*, **dobbiamo** pure sopprimere le proporzioni tanto sotto la forma Euclidea-antica quanto sotto quella Euclidea-moderna.

    È strano che con la parola proporzione si voglia affogare il concetto utile e fecondo di *proporzionalità*; che si voglia far credere all'alunno di insegnargli un nuovo calcolo, mentre tolto il manto dell'antichità rimane una piccola parte dell'algebra moderna; che non si voglia chiamar numero, ma rapporto, ciò che in sostanza è numero; che si voglia sviluppare un V libro lungo e faticoso, mentre il concetto di numero riduce a nulla tutto quel vecchio algoritmo! Anche col numero la geom. rimarrà *pura* purché sia ben fatta.

    Per i numeri irrazionali occorrono tre cose: semplificare, semplificare, semplificare. Esempi di calcoli approssimati con π, con $\sqrt{\ }$ e $\sqrt[3]{\ }$ convincono l'alunno dell'utilità degli irrazionali; *lo schiacciamento delle due classi*, e le minute disquisizioni lo degustano e lo convincono che la matematica è una bestia nera.

    Poca teoria; e il *limite superiore* semplifica e convince meglio l'alunno che lo *schiacciamento*: molta pratica; e questa condurrà l'alunno a servirsi degli irrazionali, il che è scopo finale. In generale *ammettere come vero tutto ciò che richiede minuziose disquisizioni*, dedurre con rigore logico tutto ciò che dalle premesse può facilmente dedursi - ecco l'ideale dell'insegnamento secondario e anche di quello superiore che deve condurre a pratiche applicazioni. Le scuole universitarie di magisterio, quando funzioneranno, colmeranno la lacuna.

11. Sì.

12. *Tutti* sono atti a trar profitto da un insegnamento semplice e pratico, purché ciò sia fatto sin dalla scuola elementare.

13. Precisamente. - *Piccole teorie* per **importanti** e **pratiche** applicazioni e non *grandi teorie* per **piccole** e **ideali** applicazioni.

14. Dipende dall'*attitudine storica* dell'insegnante.

15. Sarebbe anzi bene toglierli ove sono.

16. —

17. Abolire, numeri primi, mcd, mcm, periodiche, ecc. Limitare le operazioni sui complessi (solo *tempo* e *angoli*) alla *somma* e *differenza* di due complessi, *prodotto* di un complesso per un numero. Uso pratico dei logaritmi anche nelle scuole inferiori. Il I^{o} anno della scuola inferiore comprenda sempre il calcolo con interi e fratti, perché problemi *pratici* con soli interi non esistono.

18. Introdurre l'uso dei *vettori* in geom. Esigere notazione di Grassmann perché il calcolo rimane *identico* a quello algebrico *già noto* (le altre notazioni esigono un *calcolo nuovo* e dànno, inoltre, idea inesatta di vettore). La trigonometria si tratta in modo rapido ed elementarissimo con i vettori.

Dott. C. Burali-Forti
Prof. nell'Accademia Militare e nella Scuola tecnica G. Sommeiller.

3. C. Burali-Forti a G. Vailati, 6. 1. 1907
BF Mi, Lettera CDLXXXIV

Torino 6. 1. 07

Carissimo Vailati,

Ho ricevuto la tua cartolina di Crema, e ti ringrazio delle notizie.

Pare che in Italia si abbia opinione diversa. Eccoti brevemente un bel fatto i cui particolari mi sono stati affermati e che ho tutte le ragioni per credere esatti.

Il prof. Buffa fu mandato l'anno scorso (1905-1906) nella scuola *classica* di Alessandria, ove fece adottare la mia aritmetica *che adottava da nove anni* nelle altre scuole.

Il prof. Amaldi di Bologna, mandato ad Alessandria come ispettore, *vietò* al Buffa l'uso del mio libro!!!! Al principio dell'anno scolastico 1906-1907 il

Buffa ripropone il mio libro, ma il direttore e i 4 colleghi di matematica delle classi aggiunte si opposero: il Buffa richiede una critica scritta, e dopo molti stenti riesce ad ottenerla e a farla inserire nel verbale. Ti mando copia dei cinque capi d'accusa, con le mie osservazioni in rosso.

Ecco quanto ho fatto per questo caso bellissimo, e, del resto, non nuovo.

Ho fatto rivolgere dall'Editore Petrini un reclamo al Ministro, riguardo alla violazione del regolamento rispetto al *triennio* di prova. L'editore ha anche domandato a S. E. se un ispettore può vietare l'uso di un libro che da 9 anni il ministero ha continuamente approvato in numerosi istituti. Avuto poi copia dei cinque capi d'accusa, l'editore ha scritto di nuovo al Ministro, confutando le ridicole accuse. Fatto osservare come sia *attualmente possibile condannare nell'ombra un libro senza che autore ed editore possano difendersi*, invoca da S. E. provvedimenti tali che lascino al prof. completa *libertà e responsabilità* sulla scelta dei testi e rendano pubblica l'accusa e la difesa.

Non si mancherà di fare aiutare dalla stampa la questione di ordine generale che è pure di alto interesse per tutti. Come stanno ora le cose sono possibili i più bassi intrighi. Vedrò poi se è possibile anche un'azione giudiziaria per diffamazione. Ma prima di arrivare a questi estremi si tenteranno le altre strade *col solo scopo di tutelare l'assoluta libertà, senza licenza, di tutti.*

Se da Roma mi puoi mandare qualche notizia importante mi fai piacere.

Tra pochi giorni ti manderò la 4ª edizione dell'Aritmetica.

Ora una questione *vettoriale*.

Il Prof. Marcolongo mi ha mandata ieri una lunga lettera, riguardante le notazioni vettoriali. Vorrebbe, come ha già proposto il Levi-Civita, tentare un accordo per unificare le notazioni e portare tale questione al nuovo congresso.

Scriverò oggi o domani al Marcolongo, proponendo che in Italia si mettano in corrispondenza i pochi *vettorialisti*, e facendo capo ad un giornale (*opportuno* i Rendiconti del Circolo di Palermo) discutere la questione. Però bisogna portare la questione in questo campo: «analisi degli *enti* geometrici e meccanici e loro relazioni», perché solo da tale analisi può uscir fuori un sistema conveniente di notazioni.

Saresti disposto a fare adesione a quest'idea e contribuire col tuo lavoro? Bisognerebbe portare al futuro congresso l'opera collettiva dei **vettorialisti italiani**. In questa estate potremmo anche riunirci per dare corpo al nostro lavoro.

Rispondimi presto, indicandomi anche dove devo indirizzarti le lettere.

Tanti saluti dal tuo aff.mo

Burali

[Allegato: Commenti e Risposte relative al libro di testo di C. Burali-Forti]

1º Esso non corrisponde ai vigenti programmi d'insegnamento, perché ne trascura alcune parti di capitale importanza, le quali, anziché avere adeguato svolgimento, sono relegate sotto forma di un ristrettissimo compendio, in appendice.

Il libro risponde ai programmi e allo *spirito* di essi indicato nelle istruzioni. Invero: esso dà, nel testo, le norme per risolvere, con ragionamento elementarissimo, i problemi *attinenti alla vita pratica*: pone in appendice quanto deve essere già noto o forma oggetto di parte materiale di calcolo *non necessario*, ma *talvolta* utile nei problemi pratici. Che queste parti, contrariamente al sano spirito dei programmi; formino parte principale, o unica, dei comuni trattati, non è colpa dell'autore.

2º È poco accessibile alla mente degli alunni perché fa inutile ed eccessivo sfoggio di simbolismo, presuppone noti e familiari agli alunni concetti, operazioni e teorie che essi non possono sapere, ed il frasario stesso è artificioso ed oscuro.

Esso contiene minor numero di simboli e di termini dei trattati ordinari: presuppone noto quanto gli alunni *dovrebbero* sapere, e provvede con note e con l'appendice al caso che non *ricordino*: il linguaggio è sempre riportato alle sane forme del linguaggio comune.

3° La tendenza di seguire troppo fedelmente e troppo da vicino il metodo sperimentale, senza mai derogare, porta al risultato che ogni nuova regola ed ogni nuova definizione sono sempre ed indissolubilmente legate ai relativi esempi, e ciò mentre costringe l'alunno ad un più intenso lavoro per trascinarsi tutto questo materiale ingombrante, lo abitua a tutto materializzare ed assopisce in lui il senso di astrarre, la facoltà di generalizzare: e quindi il metodo che per l'A. vorrebbe essere di procedere dal concreto all'astratto, è piuttosto quello che nel concreto ha origine e scopo.

Non è possibile trovare una frase più felice di questa: *ha nel concreto origine e scopo per fare l'elogio* del libro. Nel concreto la matematica ha avuto origine grazie a Euclide, Archimede, Leibniz, Eulero, ... e oggi ha scopo nel concreto delle applicazioni meccaniche e fisiche. La mancanza delle tradizionali ed errate definizioni fa dire al relatore cose che provano non essere egli al corrente del movimento didattico.

4° Il libro è informato ad un sistema didattico nuovo, e di tale innovazione non si comprende la necessità. Ad ogni modo prima di adottarlo definitivamente, occorre farne la prova. Ma nessuno oserebbe sostenere la opportunità di fare una esperienza in corpore vili, proprio in questa scuola tanto numerosa e fiorente. Perché o l'esperienza riesce bene (del che per altro si hanno forti ragioni a dubitare) e nulla si sarà guadagnato in confronto ai metodi e ai testi di antica tradizione che già hanno dato buoni, anzi ottimi risultati, o l'esperienza riesce male e allora i danni sono grandi e inestimabili.

In *nove* anni si sono esaurite *tre* edizioni; ciò prova, materialmente che l'esperienza è stata fatta e ha dato buoni risultati. Se il relatore non comprende la necessità di cambiare i tradizionali sistemi, ciò vuol dire che non è al corrente degli studi che hanno luminosamente dimostrato da quali errori didattici e scientifici sono infarciti i testi tradizionali.

5º Ultima ragione, anch'essa però assai importante, è che un ispettore didattico venuto recentemente in questa scuola ha espresso sul libro un giudizio assai sfavorevole e, però, con tutta la delicatezza di forma, ha insistito perché esso venisse senz'altro abbandonato.	Ogni commento guasta!

Firmati sull'originale
Claudio Merizzi Relatore
Vittorio Murer
Giovanni Cresci
Petro Gazzaniga

4. C. Burali-Forti a G. Vailati, 15. 1. 1907
BF Mi, Lettera MXLIX

Torino 15. 1. 07

Carissimo Vailati,

Tieni pure la critica con i commenti rossi. Mi scrive il prof. Buffa che continuano a perseguitarlo in tutti i modi; anzi fanno correr voce che il suo trasloco è già stabilito. Sarebbe enorme perché lui non ha fatto altro che difendere la sua libertà didattica: i colpevoli sono l'ispettore e il direttore, e colpevoli per abuso di potere. Trovandoti nel *grazioso* (!) ambiente della Minerva, guarda se puoi sapere qualche cosa e scongiurare l'immediata tempesta dal capo del povero Buffa. Per me, facciano pure: non chiedo altro che un abuso di poteri per agire a modo mio.

La questione del *monopolio* dei libri di testo, monopolio riservato agli universitari, ritornerà a galla quanto prima. Voi della Commissione potete rimandarla a fondo e stabilire chiaramente la *libertà* e **responsabilità** *didattica individuale.* Avrai saputo che, per iniziativa di Lazzeri, la Mathesis vuole aprire le porte (leggi *vendersi*) agli universitari: io, in conseguenza, ho date le dimissioni da membro del Comitato e da socio. Sotto a tale mossa vi è sempre il monopolio dei libri di testo.

Saluta Vacca e ringrazialo da parte mia per l'invio della sua *bellissima* recensione. Digli pure che mi mandi il suo indirizzo a Firenze che gli scriverò presto riguardo ai vettori.

Mi fai piacere se sai dirmi qualche cosa della questione Buffa.

Tanti saluti dal tuo aff.mo,

Burali

5. C. Burali-Forti a G. Vailati, 7. 3. 1907
BF Mi, Lettera XDIV bis

Torino 7. 3. 07

Carissimo Vailati,

Grazie della tua interessantissima memoria «Mouvement Philosophique...» che ho letta e rileggerò con piacere.

Permettimi un'osservazione.

Alla fine della p. 14 dici che le tre solite proprietà rif. sim. trans. sono *caratteristiche* dell'*eguaglianza* (identità). Ora esse non caratterizzano l'= per il fatto che, ad es., *simile* (diverso da =) vi soddisfa.

L'= è *caratterizzato* dalla prp. di Leibniz

$$x = y. =: \text{«ogni proprietà di } x \text{ è, altresì, proprietà di } y\text{»}$$
$$. =: a \in Cls . x \in a . \supset_a . y \in a$$

dalla quale si *deducono* le solite tre condizioni.

Si possono dunque considerare le *relazioni* rif. sim. trans. (*adequative* come le chiama il De Amicis) che sono diverse dalla identità (=). Per queste ho un teorema di logica che è *nuovo* per l'enunciato ma che, naturalmente, si trova allo stato embrionale o latente in tutti i lavori di logica. Il teorema è questo:

Se u è una classe, e α è una relazione adequativa, diversa dall'identità (=), per gli u, allora: esiste una (sola) classe v, diversa da u, ed una sola funzione f tali che; 1° qualunque sia l'x di u, fx è un v; 2° qualunque siano gli x, y di u la relazione $x\alpha y$ equivale ad $fx = fy$.

Indica, per un momento con $K(u, \alpha)$ la classe v, e con $F(u, \alpha)$ la funzione f ed esamina i seguenti esempi:

(a) u = retta, α = «è parallela a» allora si possono stabilire i *nomi* (senza pregiudizio della natura degli enti) $F(u, \alpha)$ = direzione di, $K(u, \alpha)$ = *direzione*.

(b) Analogamente per i piani si ha *giacitura*.

(c) I tuoi esempi di *forma*, *area*, ecc.

(d) u = coppie di punti; $(x, y)\alpha(x', y')$. =: le rette xy, $x'y'$ sono parallele, verso da x a y = verso da x' a y', distanza di x a y = distanza di x' da y'; allora $F(u, \alpha)$ = vettore di, $K(u, \alpha)$ = vettore.

(e) Analogamente per le forme geometriche di Grassmann.

Quali i vantaggi del teorema? I principali sono due:

1° Si stabilisce l'esistenza dei nuovi enti $K(u, \alpha)$ che *restano definiti* dalla classe u e dalla relazione adequativa α; mentre l'ordinaria definizione per astrazione non stabilisce nulla rispetto all'esistenza, limitandosi a introdurre una frase o un nome.

2° Vien tolta dalla definiz. per astrazione la sua parte *illogica*. E mi spiego. Peano visti gli inconvenienti ha soppresso il Df= dalla prop. di Leibnitz che ti ho riportata in principio. Ciò non impedisce che quella prop. *definisca* l'= e rimane sempre non lecito definire (come si fa nelle def. per astrazione) l'eguaglianza dei nuovi enti che si introducono, e non è lecito, perché definiti gli enti la relazione $x = y$ fra essi ha già un significato.

A questi risultati sono venuto studiando la questione dell'unificazione delle notazioni vettoriali. La questione si avvia bene. Sono anche in corrispondenza con Levi-Civita. Quando vi siano cose concrete ti scriverò, ché conto sul tuo aiuto.

Potresti avere e darmi qualche notizia su quanto il Min. della P. I. intende fare circa il ricorso dell'Editore G. B. Petrini per il noto fatto di Alessandria? L'abuso di potere da parte dell'ispettore Amaldi vi è stato ma non è materialmente provato: ciò che è provato è la violazione del triennio da parte del Direttore della scuola e del Provveditore. Ora se il Min. ha stabilito di far dormire la cosa e non dare nessuna soddisfazione *morale* (non si vuol altro) all'Editore, allora questi sarà costretto a procedere in via giuridica contro il capo dell'istituto, tanto per non far morire la cosa e dare implicitamente il permesso ad un altro ispettore di ripetere il giuoco o, magari, fare anche peggio. Se ti capita la buona occasione fa pure capire che Editore ed Autore non sono affatto disposti a mettere in tacere la cosa e che una soddisfazione (basta *morale*) è necessaria.

Mi fai proprio piacere se puoi informarmi di qualche cosa.

E la riforma va avanti? Rimettete i logaritmi nella 3ª tecnica? Vietate l'abuso del m.c.d, m.c.m e Np?

Tanti saluti dal tuo aff.

Burali-Forti

P. S. Saluta Vacca e digli che si faccia vivo. Ha ricevuto la 4ª ediz.?

6. C. Burali-Forti a G. Vailati, 22. 4. 1907
BF Mi, Cartolina CDLXXXVI

Torino 22. 4. 07

Carissimo Vailati,

Che sei tanto occupato da non trovare un momento per rispondermi? Cosa ne dici di Mathesis? Io fin dal 19. 12. 06 mi sono dimesso anche da socio. Scrivimi presto.

Tanti saluti dal tuo aff.mo

Burali-Forti

7. C. Burali-Forti a G. Vailati, 1. 8. 1907
BF Mi, Cartolina, CDLXXXVII

Varenzo? 1. 8. 07

Carissimo Vailati,

Grazie dell'augurio vettoriale, ma purtroppo le nostre conclusioni sono contrarie all'Enciclopedia tedesca, e il congresso ci darà torto. Vedrò con piacere la tua *def. di massa*. Col principio logico di cui ti parlai e che sopprime la *forma* attuale della def. per astrazione sono riuscito a definire sotto forma elementare vettore = ... Sarà difficile che io venga a Parma. Troverai il Pieri, che dopo verrà, probabilmente a Torino. Vieni anche tu?

Vedo dai giornali che i lavori della Commiss. sono finiti. Tu mi potrai dire come dovrò regolarmi nel caso avvenga la trasf. delle scuole tecniche, per non rimanere in posizione troppo meschina. Del resto a me interessa stare a Torino e non conto affatto sui riguardi della Minerva; mi preme solo essere ben informato dei miei diritti legali per non farmi mistificare. Qualora la mia domanda non sia indiscreta gradirei sapere qualche cosa dei nuovi programmi matematici.

Tanti saluti e auguri di buone vacanze dal tuo aff.mo

Burali

8. C. Burali-Forti a G. Vailati, 5. 9. 1907
BF Mi, Cartolina CDLXXXIX

Torino 5. 9. 07

Carissimo Vailati,

Approvo completamente quanto dici sulle «istruzioni»; farei però un'aggiunta relativa al carattere *concreto* dell'Arit. Io scriverò le osservazioni relative alla parte ora indicata delle istruzioni, e quelle relative all'*ordine* e alla *forma* del prog. (la sostanza va benissimo). Se verrai a Torino discuteremo con *carta in mano* e ci intenderemo più facilmente. Altrimenti ti invierò lo scritto. La questione si presenta importante perché può essere il buon momento di liberare la matematica da certi vecchiumi illogici. Dimmi la tua impressione sulle tre note vettoriali; e, possibilmente, anche quella di altri. Mi pare che accolgano poco favorevolmente la constatazione delle bestialità propalate ai quattro venti dall'Enciclopedia tedesca. Quand'è che ci decideremo a rendere ai Tedeschi le loro bastonate? Procura di venire a Torino.

Tanti saluti dal tuo aff.mo

Burali

9. C. Burali-Forti a G. Vailati, 15. 11. 1907
BF Mi, Cartolina CDLXXXV

Torino 15. 11. 07

Carissimo Vailati,

Ricevo la tua lettera con un giorno di ritardo. Spero entro domani di poter formulare le osservazioni; Lunedì o Martedì al più tardi le riceverai. Puoi attendere per le bozze di stampa? Vi è una questione nuova, che viene dal nuovo ordine: la *tenera* età dei **maturi**. Tu sapessi quanto sono immaturi e quanto poco occorre fare! E la questione *pratica* delle grandezze?

Tanti saluti dal tuo aff.mo

Burali

10. C. Burali-Forti a G. Vailati, 28. 12. 1907
BF Mi, Lettera XDI

Torino 28. 12. 07

Carissimo Vailati,

Ricevo oggi le bozze del programma.

Non ho conservato copia delle osservazioni che ti mandai con la mia ultima lettera, ma vedo che di alcune cose –*secondo me* **capitali**– non hai tenuto conto. Ti riaccenno i punti principali; dalla mia lettera potrai vedere il resto. Tu dici «il programma ... mi sembra tale da garantire un campo di scelta ...».

In I i primi *tre* capoversi sono **mezzi** per trattare il 5º, mentre il 4º è indipendente da tutti e può passar primo. Con ciò *perpetui* **imponi** l'art. astratta, e tutto il lavoro fatto per condurre all'*art. pratica* vien distrutto. Il 6º capoverso aggiunto è il *primissimo* perché *base reale* dell'art. pratica.

In III, 1º e 3º capov. servono entrambi al 2º, i cui problemi inversi si risolvono col 3º.

Ecc. Vari altri che puoi controllare sulla mia lettera, come in II la precedenza di mcd e mcm alla somma di frazioni; in I manca equazione $\frac{m}{n}x = a$ risoluta da $x = \frac{n}{m}a$, che è in II, mentre in II sta meglio soltanto $\frac{m}{n}x \pm a = b$. Ancora in I «confronto fra frazioni ...» da idea di $>$ e $<$ che si ottiene col $+$ che viene dopo.

Poi altre due cose.

«*Cenno* dei simboli di logica matematica» posti in *fine di corso*, toglie all'insegnante la libertà di usarli prima, se crede. Io sopprimerei.

Per i vettori, più che un *cenno*, non sarebbe meglio di imporli per l'introduzione dei numeri immaginari? Messi in quel modo a che cosa servono?

Sarei più esplicito riguardo al *calcolo differenziale.*

Queste le critiche dette rapidamente.

In complesso trovo buonissima la distribuzione generale e ben graduata in tutto il caso. I particolari che ti ho accennato sono, secondo me, di grande importanza, perché, mentre lasciano tutta la libertà di scelta impediscono dei passi indietro.

Però per lettera è difficile intendersi. Se tu verrai a Torino, un'ora di conversazione ci porrà d'accordo. Potresti aspettare a far pubblicare? Un occasione così bella di riforma *radicale* e *logica* non si presenta più e bisognerebbe sfruttarla completamente.

Avvisami per tempo del giorno del tuo arrivo a Torino che farò in modo di esser del tutto libero.

Tanti auguri e salute dal tuo aff.mo

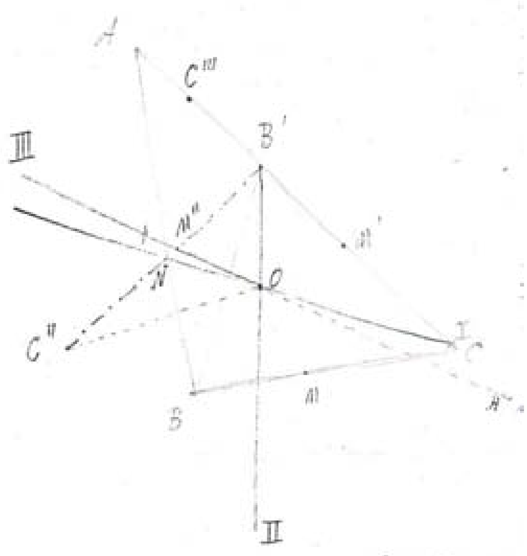
Burali

11. C. Burali-Forti a G. Vailati, 6. 12. 1908
BF Mi, Lettera XDII

Torino 6 dic 1908

Carissimo Vailati,

Ti mando una *riduzione ai minimi termini* della tua piegatura del triangolo e relativa dimostrazione semplicissima.



ABC è il triangolo.
O il punto comune alle bisettrici interne.
M, N i piedi delle bisettrici AO, CO.
1ª piegatura. Lungo OC. B viene in B'; M in M'; C ed N restano fissi.
2ª piegatura. Lungo OB' che è la posizione assunta nella 1ª piegatura dalla bisettrice OB. C viene in C'' sulla $B'N$; M' viene in M''.
3ª piegatura. Lungo OM''. C'' viene in C''' su AC *perché* piegando, *ab initio*, H lungo OM, C viene in AB o B in AC. Oppure se H è in comune ad OM'' ed AC il triangolo $HC''B'$ è uguale al triangolo ACB.
I tre punti A, C''', B' sono *proprio* quelli da te considerati. C''' sta sulla circonferenza di centro O e di raggio OC, come anche C''.

Le distanze di A, B', C''' da O sono identiche alle distanze di A, B, C da O cioè sono $\frac{bc}{p}cos\frac{\alpha}{2}$, $\frac{ca}{p}cos\frac{\beta}{2}$, $\frac{ab}{p}cos\frac{\gamma}{2}$, avendo a, b, c, p il solito significato. (*)

(*) Eccone una dimostrazione rapidissima con i *vettori* e *baricentri.*

$$O = \frac{aA + bB + cC}{2p} = A + \frac{b}{2p}(B - A) + \frac{c}{2p}(C - A)$$

$$(O - A)^2 = \frac{b^2}{4p^2}c^2 + \frac{c^2}{4p^2}b^2 + 2\frac{b}{2p}\frac{c}{2p}cos\alpha = \frac{b^2c^2}{2p^2}(1 + cos\alpha) = \frac{b^2c^2}{p^2}cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Per le distanze di B' e C''' da C o da A si ha

$$B' = A + \frac{b-a}{b}(C-A),\ C''' = A + (1 - \frac{2a}{p} cos^2 \frac{\gamma}{2}(C-A)$$

$$B' = C + \frac{a}{b}(A-C),\ C''' = C + \frac{2a}{p} cos^2 \frac{\gamma}{2}(C-A)$$

e quindi *pare* che i rapporti delle distanze dei tre punti *collineari* non abbiano proprietà semplici. Venni in biblioteca alla 3 1/2 e non ti trovai. Più tardi non potei ripassare.

Buona continuazione di vacanze e saluti dal tuo aff.mo,

Burali

Capitolo 3

Il dibattito sull'unificazione delle notazioni vettoriali

3.1 Introduzione

Cesare Burali-Forti accoglie con entusiasmo l'idea di lavorare per l'unificazione delle notazione vettoriali e di portare avanti una proposta articolata dei vettorialisti italiani. Pubblica quindi insieme a Roberto Marcolongo fra il 1907 e il 1908 cinque note sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. Le note sono una vera e propria dichiarazione programmatica degli obbiettivi degli autori, che enunciano anche quali sono i criteri sui quali si sono basati per arrivare a quella determinata scelta di notazioni. In realtà la presentazione degli autori si spinge più in la di una semplice proposta formale: viene indicato come punto di partenza il cosiddetto *sistema minimo*, che andrà però completato, a seconda di quanto richiederanno le applicazioni con le omografie vettoriali e con il sistema di H. Grassmann. Gli autori riproporranno lo schema delle loro notazioni sulle pagine della rivista *L'Enseignement Mathématique*. La pubblicazione di questa proposta darà luogo ad un dibattito che si protrarrà fino al 1912, data del Congresso Internazionale dei matematici che si terrà a Cambridge, che non vedrà però la definitiva scelta delle notazioni da usare. Sulle pagine di *Isis* nel 1914 comparirà una nuova presentazione delle notazioni proposte da Burali-Forti e Marcolongo, preceduta da una introduzione del curatore della rivista George Sarton, nella quale egli auspica che la proposta trionfi e si giunga presto ad una unificazione di notazioni[1].

Parallelamente a questi sviluppi, i due matematici italiani pubblicano fra

[1]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Analyse vectorielle générale», *Isis*, 5, Tome II, Fasc. 1 (1914), 174-182.

il 1909 e il 1913 una serie di lavori di sistematizzazione delle loro proposte in forma di libro che prenderemo in considerazione nei capitoli 4 e 5.

3.2 Origine della proposta dei vettorialisti italiani

Intorno al 1906 si discute sull'opportunità di trovare un accordo fra le diverse notazioni utilizzate per il calcolo vettoriale. Si sta preparando il IV Congresso Internazionale dei Matematici di Roma del 1908. Guido Castelnuovo scrive a Tullio Levi-Civita il 30 gennaio 1906 che Paul Appell nella sua lettera di adesione al Comitato per quel Congresso, aveva rilevato l'opportunità di inserire fra le questioni da sottoporre all'approvazione generale quella della «nomenclatura relativa ai campi di vettori». Questa proposta fu portata avanti dallo stesso Levi-Civita.

Castelnuovo propone, a tale scopo, la costituzione di un Comitato, il cui nucleo sarebbe costituito da Appell e Levi-Civita, «per studiare le varie questioni e sottoporre in blocco le proposte in una seduta plenaria del congresso». Levi-Civita scrive ad Appell il 1º febbraio 1906: «vous avez esprimé le voeux que le futur congrès puisse abutir à unifier les conventions et les notations de plusiers théories où regnent maintenant une arbitrarieté et une confusion gêantes».[2]

L'idea, partita da Levi-Civita, come Burali-Forti scrive a G. Vailati, chiedendone anche l'adesione, «per portare al futuro congresso l'opera collettiva dei vettorialisti italiani»[3], fu accolta da Burali-Forti con entusiasmo come egli stesso scrive a Levi-Civita:

> «La Sua idea di far cessare al più presto l'anarchia nelle notazioni vettoriali, mi era già stata indicata poco tempo fa dal Prof. Marcolongo, col quale stiamo ora combinando un lavoro preparatorio, atto a condurre ad una proposta *concreta* e *giustificata* sotto l'aspetto scientifico e logico da presentarsi al Congresso di Roma.»[4]

Burali-Forti e Marcolongo si propongono di pubblicare un primo lavoro che possa servire di base a osservazioni e proposte da parte di tutti quelli che si

[2] T. Levi-Civita a P. Appell, 1.2.1906, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[3] C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 1.3.1907, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[4] C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 1.3.1907, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

occupano di calcolo vettoriale, raccogliendo poi il materiale e discutendo delle proposte in una riunione da tenersi prima del congresso. Ottimisticamente egli aggiunge che:

> «Avendo cura di far pervenire ai congressisti le stampe almeno un mese prima del Congresso, è facile che nelle sedute si possa venire ad un accordo e rendere fatto compiuto l'unificazione dei simboli e la cessazione dell'anarchia.»[5]

Burali-Forti propone come organo per la pubblicazione dei lavori la rivista *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, offrendo di fare lui stesso il lavoro preparatorio relativo all'analisi dei simboli e al confronto delle varie notazioni.

Egli propone un piano generale che prevede:

- gli enti geometrici che concorrono a formare gli enti vettoriali;
- la definizione di vettore;
- la distinzione formale e effettiva tra operazioni e funzioni vettoriali;
- gli enti vettoriali ottenuti con operazioni e funzioni, avuto riguardo all'uso reale in geometria e in meccanica;
- gli enti geometrici non assolutamente necessari in meccanica, ma che contengono, come casi particolari quelli meccanici;
- le omografie vettoriali e derivate (soggette alle leggi dell'ordinario calcolo differenziale, e specialmente alla notazione universale di Leibniz) degli enti vettoriali funzione di un punto;
- e infine il confronto delle notazioni ordinarie, dei loro pregi e dei loro difetti.

Il 20 marzo 1907 Burali-Forti comunica a Levi-Civita di aver spedito a Marcolongo il primo articolo, descrivendone in breve il contenuto:

> «Poche parole per dimostrare la necessità di avere un calcolo vettoriale unico ed universale come quello dell'algebra e dell'analisi.

[5]C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 1.3.1907, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

> Altre poche parole per affermare la necessità di ricavare dal confronto delle varie notazioni il sistema più opportuno, e la necessità da parte di tutti, di rinunziare ai criteri personali che hanno condotto all'attuale anarchia.»[6]

La proposta si basa su i due seguenti criteri fondamentali:

1. le notazioni (almeno le fondamentali) non devono essere in contraddizione con quelle (pure fondamentali) di Möbius, Hamilton, Grassmann, perché, anche avuto riguardo al sistema vettoriale minimo occorrente in pratica, non pare lecito ipotecare il passato e l'avvenire delle grandi opere di quei grandi;

2. l'algoritmo vettoriale deve essere stabilito in modo da discostarsi il meno possibile da quello universalmente noto dell'algebra, perché rispettando le leggi di permanenza e di economia si facilita grandemente la diffusione del calcolo vettoriale.

Secondo Burali-Forti un sistema soddisfacente a tali criteri

> «ha già in sé quanto basta per aspirare alla vitalità; i criteri che sorgeranno spontanei dal confronto delle varie notazioni gli daranno quanto basta per poter pretendere alla vitalità; la vita dovrà riceverla dalla morte dei criteri personali, [...] poiché noi cominciamo con l'uccidere i nostri speriamo che gli altri vogliano imitarci.»[7]

L'articolo si dovrà chiudere con un caldo appello ai colleghi di contribuire alla definizione della questione con pareri, consigli e materiale bibliografico. Burali-Forti spera che queste risposte collettive e non individuali «basate solamente sui fatti reali» condurranno il Comitato organizzatore del congresso alla diffusione e all'accettazione della proposta.

Giovanni Battista Guccia[8], editore dei *Rendiconti*, mette a disposizione di Burali-Forti e Marcolongo la sua prestigiosa rivista, pubblicando, fra 1907 e il 1908, ben cinque note per l'unificazione delle notazioni vettoriali.

Nei primi articoli i due matematici si occupano del sistema vettoriale, detto sistema minimo, che fa uso degli enti: numero, punto e vettore. Esaminano

[6]C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 20.3.1907, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[7]Ibidem nota precedente.

[8]Cfr. Brigaglia, Aldo & Masotto, Guido, *Il Circolo Matematico di Palermo*, Bari, Dedalo, 1982.

le operazioni vettoriali, ed espongono come da questo sistema si possa dedurre l'intero calcolo dei quaternioni di Hamilton. Mostrano poi alcune applicazioni del sistema minimo a ben noti problemi della Geometria differenziale, come le superfici rigate, altri tratti dalla Meccanica, come la cinematica del corpo rigido o desunti dalla Fisica-matematica come i corpi isotropi in equilibrio. Nell'ultima nota gli autori indicano le limitazioni del sistema minimo, sottolineando come per alcune questioni «usuali in geometria, meno comuni per la meccanica e la fisica» sia opportuno usare un calcolo più potente, con l'introduzione quindi delle «formazioni geometriche» di Grassmann-Peano.[9] Nel carteggio con Giovanni Vailati si possono cogliere tutte le sfumature del dibattito: dopo una partenza piena di ottimismo, Burali-Forti esprime le sue preoccupazioni sull'esito della proposta avanzata

> «La questione si avvia bene. Sono anche in corrispondenza con Levi-Civita. Quando vi siano cose concrete ti scriverò ché conto sul tuo aiuto.[10]
>
> Grazie dell'augurio vettoriale, ma purtroppo le nostre conclusioni sono contrarie all'enciclopedia tedesca, e il congresso ci darà torto.[11]
>
> Mi pare che accolgano poco favorevolmente la constatazione delle bestialità propalate ai quattro venti dall'Enciclopedia Tedesca. Quand'è che ci decideremo di rendere ai tedeschi le loro bastonate?».[12]

È Roberto Marcolongo a presentare al Congresso dei matematici, tenutosi a Roma dal 6 all'11 aprile 1908, le loro proposte con il titolo «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali, Proposte di C. Burali-Forti e R. Marcolongo». Dagli Atti del IV Congresso internazionale dei matematici di Roma, risulta che dopo questa esposizione nella Sezione III-A, dedicata alla Meccanica, e

[9] Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 23 (1907), 324-328; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 65-80; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 318-332; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25 (1908), 352-375; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 26 (1908), 369-377.

[10] Cfr. C. Burali-Forti a G. Vailati, 7.3.1907, Appendice 2.11.

[11] Cfr. C. Burali-Forti a G. Vailati, 1.8.1907, Appendice 2.11.

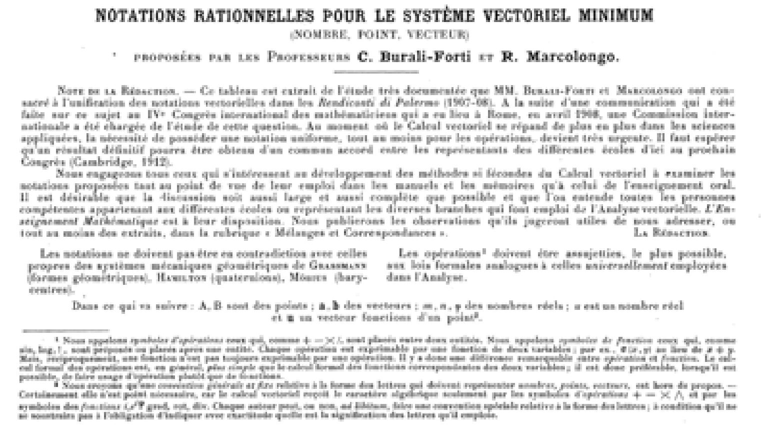
[12] Cfr. C. Burali-Forti a G. Vailati, 5.9.1907, Appendice 2.11.

presieduta da J. Hadamard, si tenne una discussione alla quale parteciparono lo stesso Hadamard, G. Peano, V. Volterra, G. Maggi, L. Levy, J. Molk e R. W. Genese. Al termine, Hadamard dopo aver ringraziato R. Marcolongo per l'opera da lui prestata in argomento, comunicò la decisione generale di presentare al Congresso, la mozione affinché fosse nominata una Commissione internazionale per l'unificazione delle notazioni vettoriali che doveva riunirsi per stabilire il manifesto da presentare per la decisione definitiva al Congresso successivo che si sarebbe tenuto a Cambridge nel 1912. Nella sessione plenaria dell'11 aprile 1908 questa proposta di commissione venne approvata all'unanimità con vivi applausi.

Dal 1908 si succederanno nelle pagine de *L'Enseignement Mathématique* una serie di contributi rivolti a chiarire la questione delle notazioni vettoriale, partendo dalle proposte di Burali-Forti e Marcolongo, cui parteciperanno G. C. Combebiac, H. E. Timerding, F. Klein, E. B. Wilson, G. Peano, E. Carvallo, E. Jahnke, C. G. Knott, A. Macfarlane.

3.3 Schema della proposta

La proposta iniziale di Burali-Forti e Marcolongo apparsa sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* è rappresentata in questo schema, tratto dalla sua riedizione nelle pagine de *L'Enseignement Mathématique*.[13]



NOTATIONS RATIONNELLES POUR LE SYSTÈME VECTORIEL MINIMUM

(NOMBRE, POINT, VECTEUR)

PROPOSÉES PAR LES PROFESSEURS **C. Burali-Forti** ET **R. Marcolongo.**

NOTE DE LA RÉDACTION. — Ce tableau est extrait de l'étude très documentée que MM. BURALI-FORTI et MARCOLONGO ont consacré à l'unification des notations vectorielles dans les *Rendiconti di Palermo* (1907-08). A la suite d'une communication qui a été faite sur ce sujet au IVe Congrès international des mathématiciens qui a eu lieu à Rome, en avril 1908, une Commission internationale a été chargée de l'étude de cette question. Au moment où le Calcul vectoriel se répand de plus en plus dans les sciences appliquées, la nécessité de posséder une notation uniforme, tout au moins pour les opérations, devient très urgente. Il faut espérer qu'un résultat définitif pourra être obtenu d'un commun accord entre les représentants des différentes écoles d'ici au prochain Congrès (Cambridge, 1912).

Nous engageons tous ceux qui s'intéressent au développement des méthodes si fécondes du Calcul vectoriel à examiner les notations proposées tant au point de vue de leur emploi dans les manuels et les mémoires qu'à celui de l'enseignement oral. Il est désirable que la discussion soit aussi large et aussi complète que possible et que l'on entende toutes les personnes compétentes appartenant aux différentes écoles ou représentant les diverses branches qui font emploi de l'Analyse vectorielle. *L'Enseignement Mathématique* est à leur disposition. Nous publierons les observations qu'ils jugeront utiles de nous adresser, ou tout au moins des extraits, dans la rubrique « Mélanges et Correspondances ». LA RÉDACTION.

Les notations ne doivent pas être en contradiction avec celles propres des systèmes mécaniques géométriques de GRASSMANN (formes géométriques), HAMILTON (quaternions), MÖBIUS (barycentres).

Les opérations[1] doivent être assujetties, le plus possible, aux lois formales analogues à celles universellement employées dans l'Analyse.

Dans ce qui va suivre : A, B sont des points ; **a**, **b** des vecteurs ; *m*, *n*, *p* des nombres réels ; *u* est un nombre réel et **u** un vecteur fonctions d'un point[2].

[1] Nous appelons *symboles d'opérations* ceux qui, comme + − × ∧, sont placés entre deux entités. Nous appelons *symboles de fonction* ceux qui, comme sin, log, !, sont préposés ou placés après une entité. Chaque opération est exprimable par une fonction de deux variables ; par ex., $\Phi(x, y)$ au lieu de $x + y$. Mais, réciproquement, une fonction n'est pas toujours exprimable par une opération. Il y a donc une différence remarquable entre *opération* et *fonction*. Le calcul formel des opérations est, en général, *plus simple* que le calcul formel des fonctions correspondantes des deux variables ; il est donc préférable, lorsqu'il est possible, de faire usage d'opération plutôt que de fonctions.

[2] Nous croyons qu'une convention *générale et fixe* relative à la forme des lettres qui doivent représenter *nombres, points, vecteurs*, est hors de propos. — Certainement elle n'est point nécessaire, car le calcul vectoriel reçoit le caractère algébrique seulement par les symboles *d'opérations* + − × ∧ et par les symboles des *fonctions* grad, rot, div. Chaque auteur peut, ou non, *ad libitum*, faire une convention spéciale relative à la forme des lettres ; à condition qu'il ne se soustraie pas à l'obligation d'indiquer avec exactitude quelle est la signification des lettres qu'il emploie.

[13]Riportiamo nella figura 9.20 il manoscritto di C. Burali-Forti, con le proposte apparse nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. Riproduciamo qui lo schema apparso sulle pagine dell'*L'Enseignement Mathématique* cfr. BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Notations rationelles pour le système vectoriel minimum», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 41-45.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
Vecteur de A à B.	B — A (B moins A)	GRASSMANN[3] HAMILTON MÖBIUS[4] BELLAVITIS[5]	AB $\overline{\mathrm{AB}}$ (AB)	Cette notation (qui indique une entité bien différente du vecteur B—A) a pour le produit alterné de GRASSMANN, des propriétés formales analogues à celles du produit algébrique, et doit être, par conséquent, réservée pour le produit alterné. Si AB indique un vecteur on a un nouveau calcul qui n'a pas d'analogie avec le calcul algébrique. Tous les défauts précédents ; difficulté typographique du trait superposé ; inutilité absolue du trait et des parenthèses.
Grandeur ou module de **a**	mod**a**[6]	ARGAND CAUCHY	|**a**|	mod est *symbole de fonction* qui suit toutes les lois algébriques communes, car on l'écrit tout du côté de la variable. Dans la notation |**a**| le symbole de fonction est || qui n'est pas du côté de la variable. Dans le calcul de GRASSMANN ce symbole produit de la confusion avec la notation |, *index*, symbole de fonction qui préposé à un vecteur ou à un bivecteur produit un bivecteur ou un vecteur (axe-moment d'un *couple*).
Somme de A avec **a** Somme de **a** avec **b** Différence entre **a** et **b** Produit de **a** par m	A + **a** **a** + **b** **a** — **b** m**a** **a**m	GRASSMANN HAMILTON (adopté par tous)		

[3] Nous indiquons seulement les auteurs qui, les premiers, ont fait usage du symbole que nous proposons.
[4] B — A, ou A — B, est un cas limite de la notation barycentrique. L'opération A + **a** conseille d'écrire B — A au lieu de A — B.
[5] Il fait usage systématiquement de la notation AB ; mais il est obligé de se servir de la notation B — A ou A — B pour *rendre évidentes* quelques identités et pour la théorie barycentrique de MÖBIUS.
[6] Des auteurs prétendent indiquer avec $\overline{m}$ le vecteur **a** tel que mod **a** = m. Il est évident que « vecteur dont le module est m », est une classe qui contient des vecteurs au nombre infini et dont la direction et le sens sont ARBITRAIRES. La notation $\overline{m}$ n'est donc pas logique et doit être exclue.

	Notations proposées		Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion	
Produit interne de **a** par **b**.	**a** $\times$ **b** (**a** interne **b**)	GRASSMANN RESAL SOMOFF	— S(**ab**) S(**ab**), S(**a**, **b**) (**a** . **b**) (**a**, **b**) **a** . **b**	Notation abrégée de HAMILTON, dans laquelle **ab** est un quaternion, fonction vectorielle qui n'est point nécessaire dans le système vectoriel minimum. La notation complète est — S(I^{-1}**a**) (I^{-1}**b**). Elles sont des fonctions de deux variables, avec des propriétés formales plus compliquées que **a** $\times$ **b** qui a *toutes* les propriétés formelles algébriques. Fonctions de deux variables. Le symbole de fonction () est contraire aux lois universelles algébriques. Le point est en algèbre un séparateur ; **a** . **b** est donc le même que **ab**, notation qui doit être réservée pour le bivecteur de GRASSMANN, pour lequel elle a les propriétés ordinaires formales algébriques.
Produit vectoriel de **a** par **b**	**a** $\wedge$ **b** (**a** vecteur **b**)	(not. nouvelle)[7]	V(**ab**) V(**a**, **b**), V(**ab**) [**a** . **b**], [**a**, **b**] **a** $\times$ **b** | (**ab**)	Notation abrégée de HAMILTON ; complète V(I^{-1}**a**) (I^{-1}**b**). Les observations faites pour S. Fonctions de deux variables. Voir observations précédentes. Encore fonctions de deux variables le symbole de fonction étant [], contrairement aux lois algébriques les plus répandues. Dans les notations (**a** . **b**), [**a** . **b**] la *forme* des parenthèses doit *caractériser* les deux fonctions, tandis que dans l'algèbre la forme des paranthèses est *accidentelle*. (de GIBBS) Le symbole $\times$ est de GRASSMANN qui l'a employé dans une signification bien différente, avec toutes les propriétés formelles algébriques. Dans le produit vectoriel il n'a pas la propriété commutative. Notation *importante* et *bien appropriée* de GRASSMANN ; mais (**ab**) est un *bivecteur* entité qui n'est pas nécessaire dans le système minimum [| **ab** = axe-moment du *couple* **ab**].

[7] Le symbole $\wedge$ est le symbole ordinaire $<$ qui a reçu une rotation à droite de 90°. Un ouvrage de calcul vectoriel peut donc être composé dans une typographie quelconque. De plus, $\wedge$ ressemble à la lettre A, renversée, initiale du mot « vectoriel » ; les symboles + — $\times$ $\wedge$ ont le même *corps*, et les formules sont d'une lecture facile. Une fois établi que le symbole d'*opération* est plus opportun que celui de *fonction de deux variables*, il a été nécessaire de proposer un symbole nouveau, car personne n'avait fait usage jusqu'ici d'un symbole convenable.

	Notations proposées		**Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion**	
(dans un plan) $\mathbf{a}$ tourné d'un angle droit vecteur $m\mathbf{a} + in\mathbf{a}$ $\mathbf{a}$ tourné de φ radiants	$i\mathbf{a}$ $(m + in)\mathbf{a}$ $(\cos\varphi + i \sin\varphi)\mathbf{a}\, e^{i\varphi}\mathbf{a}$	WESSEL HAMILTON BELLAVITIS	$m + in$ au lieu de $(m + in)\mathbf{a}$	$m + in$ est un quaternion dont m est le *scalaire* et $n\ i$ le *vecteur*. Il n'est pas possible d'identifier $m + in$ avec $(m + in)\mathbf{a}$, car, dans un plan, un *quaternion non droit* et un *vecteur* sont des entités à **trois** et à **deux** dimensions respectivement. En outre: $\mathbf{a}$ étant supprimé, on supprime l'*autonomie;* le produit de deux nombres complexes n'a point de rapport avec le produit quaternionnel et avec les opérations $\times\ \wedge$.
Gradient de u	grad u	MAXWEL RIEMANN-WEBER	∇u	Notation abrégée de HAMILTON (complète $\mathrm{I}\nabla u$) dans laquelle ∇ (nabla) est symbole de fonction qui, placé devant un quaternion, produit un quaternion. La même signification a ∇ dans les notations qui donnent la *divergence* et la *rotation* du vecteur $\mathbf{u}$. Le symbole ∇ qui est bien approprié aux quaternions n'est pas applicable dans le système minimum.
Divergence de $\mathbf{u}$	div $\mathbf{u}$	CLIFFORD	$-\mathrm{S}\nabla\mathbf{u}$	Notation de HAMILTON; complète $-\mathrm{S}\nabla\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}$. Observations précédentes.
			$\nabla\mathbf{u}$	Le symbole ∇ ne peut pas être celui de Hamilton. Il n'est point un symbole tachygraphique cartésien; il a une signification bien différente que dans la notation ∇u, bien que ∇u ne soit pas employé dans la signification hamiltonienne.
			$\mid\nabla\mathbf{u}\mid$	Comme le précédent: la notation $\Vert$ est inutile.
			$\nabla\times\mathbf{u}$	Le $\nabla . \mathbf{u}$ de GIBBS, dans lequel ∇ doit être *vecteur symbolique*; mais il n'a pas les propriétés des vecteurs par rapport à $\times$. Le symbole $\nabla\times$ est tachygraphique pour les coordonnées cartésiennes; il n'a pas d'importance, car il n'admet pas de puissances.

	Notations proposées		**Notations à exclure et principales raisons de l'exclusion**	
Rotation de $\mathbf{u}$	rot $\mathbf{u}$	LORENTZ FERRARIS	$\mathrm{V}\nabla\mathbf{u}$	Notation de HAMILTON; complète $\mathrm{V}\nabla\mathrm{I}^{-1}\mathbf{u}$. Observations précédentes.
			$[\nabla\mathbf{u}]$	Le même que pour $\mid\nabla\mathbf{u}\mid$. Les fonctions de $\mathbf{u}$, $\mid\nabla\mathbf{u}\mid$, $[\nabla\mathbf{u}]$ sont caractérisées par la *forme* des parenthèses: donc, le symbole ∇ est inutile. Mais les parenthèses ne peuvent pas être symboles de fonctions et leur forme ne peut pas distinguer une fonction de l'autre.
			$\nabla\wedge\mathbf{u}$	La notation $\nabla\times\mathbf{u}$ de GIBBS. Voir les observations faites pour la notation $\nabla . \mathbf{u}$.
Torino, Napoli, janvier 1908. C. BURALI-FORTI. R. MARCOLONGO.			Δu $\Delta_2 u$ $\Delta_2\mathbf{u}$	(de LAMÉ). Il a la même signification que le mod grad. Dans le calcul vectoriel parait grad u et, en dépendance, son module. La forme symbolique cartésienne du symbole Δ_2 est $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; mais on a $\Delta_2 u = \text{div grad } u \qquad \Delta_2\mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} - \text{rot rot } \mathbf{u}$, et donc Δ_2 a des propriétés diverses selon qu'il est proposé à un nombre ou à un vecteur. Or il n'est pas permis d'indiquer avec un même symbole deux fonctions qui différent non seulement par le champ d'application, mais aussi par leurs propriétés. S'il est nécessaire d'employer les produits de trois parmi les fonctions div, grad, rot, on pourra poser $\Delta = \text{div grad} \qquad \Delta' = \text{grad div} - \text{rot rot}$, ou bien écrire Δ_2 et Δ_2' au lieu de Δ et Δ'.

3.4 Il dibattito su *L'Enseignement Mathématique*, 1908-1912

Dal 1908 in poi si susseguono sulle pagine de *L'Enseignement Mathématique* una serie di contributi che prendono spunto dalle proposte di Burali-Forti e Marcolongo edite sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* Mentre Burali-Forti enfatizza l'importanza delle trasformazioni lineari di vettori o omografie vettoriali, nella nota di Burali-Forti e Marcolongo[14] si riproduce la tavola comparativa delle diverse notazioni vettoriali usate che contiene la loro proposta specifica.

Il dibattito vede intervenire oltre a C. Burali-Forti e R. Marcolongo, G. C. Combebiac (Paris), H. E. Timerding (Strasburgo), F. Klein (Gottinga), E. B. Wilson (Boston), G. Peano (Torino), E. Carvallo (Parigi), E. Jahnke (Berlino), C. G. Knott (Edinburgo), A. Macfarlane (Chatham, Canada)[15]. Sottolineeremo nel seguito gli aspetti che riteniamo più rilevanti per comprendere l'insucesso della proposta al congresso di Cambridge, così come le divergenze matematiche più significative sulle nozioni matematiche coinvolte.

Combebiac, Wilson e Carvallo mettono in questione apertamente la necessità di una unificazione delle notazioni in questo dominio della matematica. Felix Klein, basandosi nell'esperienza tedesca del 1903, sottolinea il fatto che

[14]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25 (1908), 352-375.

[15]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Notations rationelles pour le système vectoriel minimum», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 41-45; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Réponse a Combebiac», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 134; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Réponse à Timerding et Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 459-466; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Réponse à Carvallo, Cargill-Knott e Macfarlane», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 46-54; Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «À propos d'un article de M. E. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 13 (1911), 138-148; Burali-Forti, Cesare, «Sur les dyads et les dyadics de Gibbs», *L'Enseignement Mathématique*, 14 (1912), 276-282; Combebiac, Gaston Charles, «À propos d'un article de M. Burali-Forti sur le calcul vectoriel», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 46; Timerding, Heinrich Emil, «Lettre de M. Timerding (Strasbourg)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 129-134; Klein, Felix, «Opinion de M. F. Klein (Goetingue)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 211; Wilson, Edwin Bidwell, «Lettre de M. Edw. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 211-216; Peano, Giuseppe, «Lettre de M. Peano (Turin)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 216-217; Carvallo, Emmanuel, «Opinion de M. Carvallo (Paris)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 381; Jahnke, Eugen, «Opinion de M. E. Jahnke (Berlin)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 381; Knott, Cargill Gilston, «Remarques de M. Cargill-G Knott (Edimbourg)», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 39-45; Macfarlane, Alexander, «Opinion de M. Alex. Macfarlane (Chatham, Canada)», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 45-46.

la mancanza di un imperativo esterno, come invece successe nel caso delle unità elettrotecniche, rischia di rendere impossibile ogni progresso verso l'unificazione.

Peano, Timerding e Jahnke sono fondamentalmente d'accordo sulla proposta degli italiani, anche se suggeriscono alcune lievi modifiche nelle notazioni.

Knott fa una accorata difesa del sistema dei quaternioni sviluppato da Hamilton e Tait, sia in relazione alla proposta degli autori sia in collegamento con il sistema di Gibbs. Il sistema quaternionico è difeso anche da Macfarlane. Burali-Forti e Marcolongo mostrano sempre grande considerazione per l'opera di Hamilton pur sottolineando la sua insufficienza nel trattamento dei problemi che richiedono le omografie vettoriali.

Wilson, difendendo i contributi di Gibbs, critica in modo aggressivo numerosi punti della proposta degli italiani e conclude che in base alla diversità di opinioni raccolte nella rivista

> «bisogna sperare che i vettori e l'analisi vettoriale diventeranno in questo modo così familiari nella loro diversità che, nel 1912, potranno continuare il loro sviluppo senza unificazione e senza riforma, con la stessa libertà che si concede al calcolo differenziale ed integrale».[16]

Timerding, infine, difende la necessità di includere i bivettori per una adeguata rappresentazione delle grandezze fisiche.

La commissione nominata nel congresso di Roma non realizzò, a detta di Burali-Forti e Marcolongo, nessuno scambio di idee al punto che nel congresso di Cambridge del 1912 non si affronta l'argomento dell'unificazione delle notazioni.

Nella rivista *Isis* del giugno del 1914 George Sarton pubblica una recensione di Burali-Forti e Marcolongo della loro *Analyse vectorielle générale* del 1912-13, facendola precedere da un'introduzione nella quale afferma

> «Ils ont établi un système de notations qui me paraît bien réaliser sous une forme simple, logique et uniforme, sans difficultés typografiques, un système minimum, dont la puissance et la commodité ont d'ailleurs été clairement démontrées par beaucoup d'applications à la mécanique et à la physique mathématique ».[17]

[16]Cfr. Wilson, Edwin Bidwell, «Lettre de M. Edw. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 211-216.

[17]Sarton, George, «Unification des notations vectorielles», *Isis*, 5, Tome II, Fasc. 1 (1914), 173-174.

A completamento della questione Burali-Forti e Marcolongo rimandano all'Appendice dell'*Analyse vectorielle générale* nella quale si discutono le proposte tratte dalla traduzione francese dell'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, dal contributo esposto da P. Langevin dall'originale tedesco di M. Abraham «et qui sont en pleine contradiction avec les divers systèmes vectoriels et les principes qui doient présider à la formation logique de leurs algorithmes»; si discute anche il sistema pubblicato da L. Prandtl, in occasione delle riunioni progettate e mai avvenute per il Congresso di Cambridge del 1912.[18]

3.5 Conclusione

Per quanto riguarda le notazioni vettoriali vediamo che non si arriva veramente ad un accordo. Anche se Burali-Forti e Marcolongo portano avanti un lavoro interessante di revisione critica e storica dei contenuti in realtà gli autori, anche se arrivano a pubblicare su *Isis* un riassunto delle loro proposte non si arriva ad una notazione unica. Forse anche in questo caso l'intransigenza di Burali-Forti ha causato non pochi problemi. Il più degli autori rimane legato alle sue notazioni, con interessi nazionali molto marcati. Le scuole dei seguaci di Hamilton, la scuola dell'Enciclopedia tedesca, quella dei vettorialisti italiano, seguono le loro preferenze.

C'è poi un secondo gruppo di autori che non avverte la necessità di portare avanti un'unificazione delle notazioni e trovano positivo che i ricercatori si abituino al passaggio da una tipo di notazione ad un'altra. Questi studi sulle notazioni apriranno la via al prossimo capitolo nel quale Burali-Forti e Marcolongo discuteranno il calcolo vettoriale.

[18]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Analyse vectorielle générale: II, Applications à la mécanique et à la physique*, Pavia, Mattei, 1913, 119.

Capitolo 4

Il calcolo vettoriale

4.1 Introduzione

Nel 1909 C. Burali-Forti e R. Marcolongo pubblicano il volume *Elementi di calcolo vettoriale*.[1]

Nella prima parte del libro gli autori espongono sotto forma assoluta o autonoma, i fondamenti del calcolo vettoriale. Nella seconda parte applicano il sistema vettoriale che chiamano minimo ad alcune questioni di Geometria differenziale, di Meccanica e di Fisica-matematica. Secondo gli autori il calcolo vettoriale minimo non è però sufficiente per trattare tutte le questioni d'interesse e deve essere completato con lo studio degli enti che sono funzioni di un punto, con le derivate di tali enti rispetto ad un punto di cui sono funzioni e con le formazioni geometriche di seconda e terza specie di Grassmann. Fanno qui riferimento al libro *Omografie vettoriali* che uscirà più tardi nello stesso 1909.[2]

Sottolineano che si tratta del primo trattato italiano di calcolo vettoriale, che differisce sia per metodo che per notazione dai trattati pubblicati precedentemente in Germania. Il metodo è diverso in quanto si pone l'accento sul modo assoluto di operare sugli enti geometrici e nelle notazioni che cercano di essere il più possibile conformi a quelle dei fondatori del calcolo vettoriale.

Gli autori rimandano ai contributi pubblicati nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* dove hanno esposto in modo estensivo la loro proposta per l'unificazione delle notazioni vettoriali.

[1] Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Bologna, Zanichelli, 1909.

[2] Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica*, Torino, Petrini, 1909.

Terminano dicendo che la conoscenza dei metodi vettoriali si impone oramai non solo al fisico e all'elettrotecnico, ma anche al cultore delle matematiche pure. Questa osservazione concernente l'utilizzazione dei metodi vettoriali si ritrova trascritta anche nell'introduzione del *Omografie Vettoriali* e può essere vista come esempio del fatto che l'introduzione di un nuovo metodo di lavoro è accettato per quanto riguarda a certe applicazioni, in questo caso più vicine al campo della Fisica o della Fisica-matematica, e non per altri.[3]

L'introduzione si conclude con un riconoscimento al contributo dell'opera di Peano per quanto riguarda la diffusione e la conoscenza dei metodi di Grassmann.

4.2 *Elementi di calcolo vettoriale* (1909)

Capitolo I- Somma e prodotto per un numero

Il libro comincia con l'esposizione di alcune formule relative ai vettori per passare poi nel secondo capitolo a trattare il calcolo baricentrico. Questa impostazione è diversa da quella di Peano che vede i vettori come un caso particolare delle formazioni di prima specie di Grassmann, per massa nulla.

[§ 1.] Vettori eguali

Seguendo la notazione di Hamilton e Grassmann gli autori usano il simbolo $B - A$ per indicare il vettore da A a B e definiscono vettore generico $B - A$, come: quella funzione della coppia di punti A, B che, col variare di A e B, rimane invariata solamente quando si sostituisce alla coppia A, B una qualunque delle coppie C, D, tali che il punto medio tra A e D = il punto medio tra B e C

Per $A \neq B$, a questa condizione possono sostituirsi le seguenti:

1ª I segmenti AB, CD hanno uguale lunghezza;

2ª Le rette AB e CD hanno eguali direzioni (sono parallele);

3ª Il verso da A a B è identico al verso da C a D.

[§ 3.] Lunghezza, direzione, verso e modulo

[3] Per l'analisi di un *case study* riguardante il calcolo differenziale assoluto cfr. Dell'Aglio, Luca, «Un *case study* nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca pre-relativistica», *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 24 (2) (2004), 9-65.

Si definiscono lunghezza (o grandezza), direzione e verso di un vettore e modulo di un vettore.

[§ 4.] Caratteristiche di un vettore; rappresentazione grafica

Due vettori, non nulli, sono uguali solamente quando hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso. Ogni ente caratterizzato da lunghezza, direzione e verso è dunque un vettore. Così sono vettori le velocità e le accelerazioni.

Gli autori fanno qui una distinzione fra ciò che hanno definito come un vettore e le forze che considerano come enti che pur avendo una lunghezza, una direzione ed un verso, sono caratterizzati da un punto di applicazione e sono quindi funzione di un punto e di un vettore.

[§ 5.] Somma di un punto con un vettore

Si introduce qui il concetto di somma di un punto con un vettore che dà il punto univocamente determinato che si ottiene dalla traslazione di un altro punto nella direzione di cui il vettore ne individua lunghezza, direzione e verso.

Questo concetto come gli autori esprimono nell'*Omografie vettoriali* non è accettato da tutti gli autori. Probabilmente è ispirato o meglio ricava la sua giustificazione dal fatto che gli autori si ispirano alle formazioni geometriche di Grassmann di prima specie e quindi non risulta per loro sorprendente.

[§ 8.] Espressioni lineari vettoriali

Ogni vettore $\boldsymbol{a}$ si può esprimere linearmente, in un sol modo mediante i vettori non complanari $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ con una terna x, y, z di numeri reali unica.

[§ 11.] Coordinate cartesiane

I tre vettori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ siano di egual modulo e O sia un punto. Qualunque sia il punt P, il vettore $P - O$ sarà della forma

$$P = 0 + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

I numeri x, y, z sono le coordinate cartesiane di P rispetto al sistema di riferimento di cui: O è l'origine; le parallele condotte da O ad $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ne sono gli assi; i versi di $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i versi positivi degli assi; la lunghezza di uno qualsiasi dei tre vettori ne è l'unità di riferimento.

Il punto P è così espresso mediante le sue coordinate e tutto il sistema di riferimento è presentato in modo semplice e, ciò che più interessa gli autori, assoluto, poiché le coordinate di un punto non bastano a individuare il punto se non è dato anche il sistema di riferimento.

Capitolo II - Calcolo baricentrico

[§ 1.] Algoritmo delle formazioni geometriche di prima specie di Grassmann.

Le espressioni del tipo $A = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n = \sum_1^n x_iA_i$, $B = y_1B_1 + y_2B_2 + \cdots + y_nB_n = \sum_1^n y_iB_i$ dove gli x_i, y_i sono numeri reali, e gli A_i, B_i sono punti, si chiamano seguendo Grassmann, formazioni geometriche di prima specie. Punti e vettori sono dunque casi particolari delle formazioni geometriche di prima specie di Grassmann.

[§ 2.] Massa e baricentro.

Si chiama *massa* di $\sum_1^n x_iA_i$ il numero $\sum_1^n x_i$. Si chiama baricentro di A secondo la notazione di Möbius $\dfrac{\sum_1^n x_iA_i}{\sum_1^n x_i}$.

Capitolo III - Prodotto vettoriale e interno

[§ 2.] Prodotto vettoriale

Gli autori definiscono «prodotto vettoriale» (o anche esterno) di un vettore per un altro e lo indicano con la notazione $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ quel vettore tale che

1. il modulo è uguale alla misura dell'area del parallelogrammo di vertici 0, $0 + \boldsymbol{a}$, $0 + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $0 + \boldsymbol{b}$;
2. la direzione è normale ad $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$; cioè normale ad un piano parallelo ai due vettori (al piano del parallelogrammo considerato prima);
3. il verso è quello che può prendere il *pollice* della *mano sinistra*, quando si dispongono l'*indice* ed il *medio* rispettivamente nella direzione e verso di a e b. (Al contrario della regola della mano destra).

[§ 3.] Prodotto interno

Gli autori definiscono il prodotto interno a partire da quello vettoriale indicandolo con $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ che si legge «a interno b» il numero reale per cui si deve moltiplicare il vettore $\boldsymbol{x}$ arbitrario, ma normale a $\boldsymbol{b}$, per ottenere il vettore $(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{b}$. Devono però dimostrare che un numero così definito è indipendente da $\boldsymbol{x}$ ed è univocamente determinato da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{b}$$

[§ 8.] Coordinate cartesiane ortogonali

Si danno le espressioni rispetto ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali delle operazioni definite in precedenza: prodotto vettoriale, prodotto interno, modulo, volume del parallelepipedo, coseno dell'angolo fra due vettori, ecc.

Capitolo VI - Funzioni di un punto

[§ 1.] Funzioni di un punto in generale

Gli autori indicano che si può considerare un numero, o un vettore, o un punto (una formazione di prima specie di Grassmann) funzioni di un punto variabile P. Anche di queste funzioni di P si possono considerare le derivate rispetto alla variabile P; ed il loro calcolo formale ha molto in comune con quello delle ordinarie derivate. Ma per lo studio generale di tali derivate è necessario l'uso delle omografie vettoriali e si limiteranno a considerare alcune speciali funzioni delle derivate rispetto ad un punto P e precisamente: il gradiente di un numero, la rotazione e la divergenza di un vettore.

[§ 2.] Gradiente

Se u è un numero funzione del punto P, variabile in un campo a tre dimensioni, con la notazione $grad\, u$ si indica il vettore, funzione di u e di P soltanto, tale che

$$du = (grad\, u) \times dP$$

qualunque sia lo spostamento (vettore) dP di P, essendo du il corrispondente incremento di u.

[§ 3.] Rotazione e divergenza

Si chiamano rotazione di u e divergenza di u, u vettore, $rot\boldsymbol{u}$ e $div\boldsymbol{u}$, rispettivamente il vettore ed il numero

$$rot\boldsymbol{u} \times dP \wedge \delta P = d\boldsymbol{u} \times \delta P - \delta\boldsymbol{u} \times dP$$

$$div\boldsymbol{u} = \{grad(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{a}) - rot(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{a})\} \times \boldsymbol{a}$$

qualunque siano gli spostamenti arbitrari dP, δP di P essendo $d\boldsymbol{u}$, $\delta\boldsymbol{u}$ i corrispondenti incrementi di $\boldsymbol{u}$; e qualunque sia il vettore costante, ma arbitrario e unitario $\boldsymbol{a}$.

La traduzione francese

Il volume in francese del 1910[4] è sostanzialmente la traduzione di quello del 1909 in italiano a parte le note storiche e l'appendice sui limiti del sistema minimo.

Gli autori osservano che il sistema formato dagli elementi punto, vettore, con le operazioni $+, -, \times, \wedge$ e dalle funzioni *grad*, *div*, *rot* permette di trattare numerose applicazioni, ma non è sufficiente per molte questioni di Geometria, di Fisica e di Meccanica. Se al sistema di operazioni si aggiungono le trasformazioni lineari di vettori in vettori, le omografie vettoriali e se si considerano anche le derivate dei vettori e delle omografie vettoriali rispetto ad un punto del quale sono funzioni, si possono risolvere in forma assoluta molteplici applicazioni. Ma il complemento così apportato al sistema di questo libro non è ancora sufficiente. È insufficiente per diversi aspetti che elencano:

a) Una forza indipendente da quale sia la sua definizione fisica è una funzione del suo punto di applicazione P e del suo vettore u cioè del vettore che determina la grandezza, la direzione ed il verso della forza. Le forze però si comportano in modo molto diverso a seconda che si applichino a un corpo deformabile o a un corpo solido.

b) Inconvenienti ancora più gravi si presentano in geometria. Dati due punti A e B presi su una retta sono sufficienti per determinare una retta. Ora il sistema esposto nel testo non permette di considerare sotto forma assoluta questo fatto.

L'insufficienza che abbiamo appena segnalato nel sistema del testo si fa sentire in parti importanti della geometria e della meccanica ed è per questo che si rende necessario un sistema più ampio per risolvere queste questioni. È sufficiente introdurre con Grassmann il prodotto alternato in modo che tutte le mancanze esposte sopra spariscono.

4.3 Ricezione

Edwin Bidwell Wilson pubblica nel *Bulletin of the American Mathematical Society* una lunga recensione che riguarda sia le notazioni vettoriali sia i due volumi pubblicati da Burali-Forti e Marcolongo nel 1909.

[4]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elements de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la geometrie, à la mecanique et à la physique-mathématique*, Paris, Hermann, 1910

L'autore commenta l'opera in vista della discussione che doveva aver luogo durante il Congresso Internazionale dei Matematici di Roma del 1908 sulle notazioni di Analisi vettoriale e forse contemplando la possibilità di dare alcune raccomandazione su alcuni sistemi particolari. Burali-Forti e Marcolongo si erano proporsi il lodevole e ingrato compito di collezionare ed editare tutto il materiale scientifico dal punto di vista storico e critico, che doveva essere indispensabile per poter trattare la questione durante il congresso. Questo materiale venne pubblicato in cinque note a partire dal volume 23 (1907) dei *Rendiconti* di Palermo e continuato con successo durante i successivi numeri e volumi. Secondo l'autore non è necessario dire che il lavoro venne portato a termine con l'attesa accuratezza, ma forse non con la completezza desiderabile. L'attenzione degli autori si rivolse quasi esclusivamente al sistema minimo, perché è più utile in Fisica-matematica, cioè alle questioni della somma di vettori, del prodotto scalare e vettoriale, della differenziazione rispetto a uno scalare, della differenziazione rispetto allo spazio (gradiente di una funzione scalare e divergenza e rotazione di una funzione vettoriale della posizione). Fu fatta una discussione considerevole dei quaternioni ma, come riconosciuto dagli autori, vennero trascurati diversi argomenti come le funzioni lineari vettoriali (Hamilton) o quozienti e *Lückenausdrücke* (Grassmann) o le diadiche (Gibbs) tra le più importanti. Wilson commenta che gli autori arrivarono fino a proporre un loro sistema minimo di notazioni essenziali, combinando alcuni simboli in uso con altri scelti da loro, in modo da creare finalmente ancora maggiore diversità di notazioni.

> «The conception of unification as conceived in the mind of each enthusiastic unifier appears to be that he shall disagree with everybody and that everybody shall agree with him.»[5]

Il suggerimento di $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ per il prodotto scalare sembra particolarmente infelice a Wilson, visto che tale proposta è attualmente in uso per il prodotto vettoriale.

Questo è il primo suggerimento che violentemente e confusamente differisce dalle notazioni che sono state stabilite abbastanza ampiamente. È vero, osserva Wilson, che Grassmann in alcuni lavori usa $\times$ come simbolo per la moltiplicazione scalare, ma il raro e poco importante uso storico non giustifica a suo avviso la sostituzione del moderno uso «tollerably popular». La stessa obiezione non può essere mossa per il simbolo $\wedge$ che invece non è in uso.

[5]Cfr. Wilson, Edwin Bidwell, «The unification of vectorial notations», *Bulletin of the American Mathemathical Society*, 8 (1910), 415-436, 415.

Sulla necessità di nuovi sistemi di notazioni, l'autore vuole mettere in risalto che ci sono già dei sistemi elaborati e sviluppati in modo consistente, che rappresentano un parte importante di lavoro di grandi menti quali sono quelle di Hamilton, Grassmann e Gibbs. Qualunque di questi sistemi sembra adeguato per l'uso in fisica. Il punto di vista di Gibbs sembra essere stato quello di fondere gli altri sistemi, insieme alla teoria delle matrici per creare un sistema particolarmente adatto ai fisici. In aggiunta a questi grandi sistemi c'è poi quello adottato dall'Enciclopedia Tedesca, seguito da molti autori specialmente in Germania.

Secondo Wilson, sebbene dal punto di vista sentimentale o della forma e della giustizia scientifica si potrebbe scegliere uno dei sistemi collegati al nome di uno dei grandi scienziati, dal punto di vista pratico, è invece consigliabile una scelta più opportunista nella direzione del sistema più ampiamente esteso. La protesta legata alla confusione di notazioni sembra all'autore alquanto «isterica», secondo lui un esame della letteratura esistente mostra invece una piccola diversità fra i lavori scritti in notazione vettoriale.

Nonostante la premessa, e in riferimento agli *Elementi*, Wilson afferma che è senz'altro una buona notizia che sia stato finalmente proposto un trattamento sistematico dell'analisi vettoriale in italiano. Secondo lui non è possibile fare una critica del volume in modo slegato dalle proposte fatte dagli autori sulle pagine dei *Rendiconti* e de *L'Enseignement Mathématique.*

Wilson comincia allora una dettagliata recensione degli *Elementi* e anche del libro *Omografie vettoriali* che tratteremo nel prossimo capitolo. Prenderemo in considerazione alcune delle sue affermazioni.

L'autore apre la recensione considerando la definizione dei vettori come differenza di due punti. Da un punto di vista matematico, osserva Wilson, la distinzione fra punti e vettori, introducendo esplicitamente l'origine e i vettori del sistema di riferimento è consigliabile dal punto di vista matematico e apre la via all'algebra geometrica di Grassmann, mentre è meno opportuna per i fisici che tendono a considerare un minimo irriducibile di elementi.

Bisogna osservare che Wilson scrive la sua recensione traducendo le notazioni degli autori secondo l'uso di Gibbs.

Per quanto riguarda la definizione di gradiente, l'autore rivendica la notazione di Gibbs $dr\nabla V = dV$, che a suo avviso è intrinseca e assoluta e indipendente da qualsiasi riferimento. Sottolinea che gli autori hanno una «violenta avversione» per il simbolo ∇ e critica le definizioni di rotazionale e divergenza di un vettore che secondo lui è meglio introdurre facendo uso dei teoremi di Stokes e di Gauss. Segue poi una discussione sul fatto che Burali-Forti e Marcolongo considerano che bisogna indicare in modo diverso il simbolo Δ a seconda che si applichi ad uno scalare o ad un vettore.

Nel *Bulletin des Sciences Mathématiques* appare una recensione dell'edizione francese degli *Elementi*. La recensione è firmata da J. T. [Jules Tannery].

Tannery osserva che l'edizione italiana di questo libro del 1909 costituisce il primo trattato italiano sul metodo vettoriale. L'autore non conosce nessun volume francese che abbia per oggetto questo metodo, del quale nessuno mette in discussione l'interesse e l'utilità, e del quale i fisici proclamano la necessità e sul quale bisogna dire che l'elegante traduzione francese che il Sig. Lattès ha dato dell'opera dei Sig. Burali-Forti e Marcolongo sarà sicuramente accolta benissimo in Francia.

Tannery rileva che il libro è breve. Se si fa astrazione dell'Appendice e delle Note, non comporta più di 173 pagine, ma comprende diverse applicazioni; le dimostrazioni sono semplici, sono descritte abbastanza in dettaglio in modo da poter seguirne i successivi passi; quanto alle applicazioni quelle che non insegneranno nulla di nuovo al lettore gli permetteranno di impadronirsi delle notazioni. La metodologia è talmente elegante che il lettore si convince velocemente che il metodo è veramente nella natura delle cose.

Anche se le librerie francesi sono povere di volumi dedicati all'analisi vettoriale, osserva l'autore della recensione, questo calcolo è veramente penetrato nell'insegnamento. Non c'è nessuno studente che abbia seguito nelle Università, i corsi di analisi o di meccanica razionale che non sappia cos'è un prodotto scalare o un prodotto vettoriale, il gradiente o il rotazionale o la divergenza di un vettore. Bisogna dire una parola sul linguaggio e le notazioni degli autori. Si sa che il Sig. Burali-Forti dà la più grande importanza alla questione delle notazioni. Le notazioni di Burali-Forti sono secondo l'autore simili a quelle di Gibbs, nonostante si prenda un simbolo diverso per il prodotto scalare. Tannery fa qualche lieve commento in relazione al linguaggio, secondo lui non sarebbe costato molto chiamare il rotazionale *tourbillon*, nome molto più comune in Francia. Critica poi la differenza fra i vettori con origine fisso e i vettori intesi come classe di segmenti equipollenti.

Nel 1921 comparirà una seconda edizione degli *Elementi di calcolo vettoriale*[6] che ripropone sostanzialmente gli stessi contenuti, anche se riordinati in modo leggermente diverso rispetto all'edizione francese del 1910. Sul *Bulletin des Sciences Mathématiques* del 1923 comparirà una recensione di E. Cahen del volume.[7] Cahen osserva che una recensione della prima edizione era già stata fatta nella stessa rivista da J. Tannery e dichiara che le no-

[6]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria alla meccanica e alla fisica matematica. 2 ediz.*, Bologna, Zanichelli, 1921.

[7]Cfr. Cahen, E. «Burali-Forti, C. e Marcolongo R. *Elementi di calcolo vettoriale*, 2ª ediz., riordinata e ampliata. Bologne, Zanichelli.», *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 47 (1923), 109-110.

tazioni e le denominazioni degli autori sono ormai divenute classiche, e che alcuni professori non hanno paura a scrivere delle equazioni vettoriali nei loro corsi anche se non in modo sistematico. Secondo lui gli studenti francesi non avranno nessun problema ad impadronirsi dei metodi del calcolo vettoriale e non troveranno migliore guida del testo di Burali-Forti e Marcolongo. L'opera è estremamente chiara e ben scritta e la lingua non rappresenta nessun ostacolo. Si augura, in ogni caso, che una traduzione non tarderà a comparire visto che la prima edizione dell'opera è completamente esaurita.

4.4 Conclusione

Burali-Forti e Marcolongo scrivono nel 1909 il primo trattato sistematico di calcolo vettoriale in italiano. Esce rapidamente una traduzione francese del volume che riceve critiche positive in Francia e critiche abbastanza severe nel mondo anglosassone. Nel 1921 esce una seconda edizione del volume del 1909. Gli autori subito mettono in risalto il fatto che il volume del 1909 va completato per rendere conto delle applicazioni e che per trattare alcuni aspetti teorici in modo più semplice ed elegante è necessario ricorrere alle trasformazioni lineari di vettori che prenderemo in considerazione nel prossimo capitolo e al calcolo geometrico di Grassmann.

4.5 Appendice: Indice del *Elementi di calcolo vettoriale*

Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Bologna, Zanichelli, 1909.

Parte Prima - Operazioni e funzioni vettoriali

Capitolo I- Somma e prodotto per un numero

Capitolo II - Calcolo baricentrico

Capitolo III - Prodotto vettoriale e interno

Capitolo IV - Applicazioni all'Idromeccanica

Capitolo V - Applicazioni alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi

Capitolo VI - Applicazioni all'Elettrodinamica

Note

Appendice e Note storiche e critiche del *Elements*

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elements de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la geometrie, à la mecanique et à la physique-mathématique*, Paris, Hermann, 1910.

Questo volume è l'edizione francese degli *Elementi* del 1909. Non trascriviamo l'indice perché il volume francese è la traduzione del volume italiano. C'è però un *Appendice* e delle *Notes historiques et critiques* che non compaiono nell'edizione italiana e che riportiamo

Appendice

II. - Quaternions de Hamilton

1. Opérateurs vectoriels. Champ d'application de ces opérateurs
2. Définition des quaternions au moyen des symbols $\times$, $\wedge$
3. Symboles S, V, K, T ; quaternions droits
4. Définition de Hamilton ; identité de cette définition et de la précédente
5. Somme et produit de quaternions
6. Puissances
7. Opérateurs I, I^{-1}
8. La «symbolical identification»de Hamilton

Notes historiques et critiques

Note I. - Sur les définitions par abstraction

Note II. - Notice historique sur les vecteurs

Note III. - Notice historique sur le produit vectoriel et le produit intérieur

Note IV. - Notice historique sur les fonctions *grad*, *rot*, *div*

Capitolo 5

Le omografie vettoriali

5.1 Introduzione

Nella prefazione dell'*Omografie vettoriali* C. Burali-Forti e R. Marcolongo indicano che il libro fa seguito agli *Elementi di calcolo vettoriale* (1909) e si propone di dare al sistema vettoriale minimo, sviluppato negli *Elementi* una parte di quanto gli manca, per risolvere in forma assoluta ed autonoma, la maggior parte delle questioni fisico-meccaniche.

Prenderemo in considerazione fondamentalmente il primo volume *Analyse Vectorielle Générale*[1].

Le applicazioni non saranno oggetto della nostra analisi perché come indica lo stesso Marcolongo esse non sono state sviluppate da Burali-Forti che si occupava più degli aspetti teorici, l'analisi dettagliata di queste costituirebbe un tema che esula dagli scopi nel presente lavoro.

5.2 Genesi e sviluppo

Burali-Forti prende in considerazione le omografie, partendo dalla geometria proiettiva e introducendo nuove notazioni, proponendo nuove funzioni e semplificazioni o risistemazioni nel modo di introdurre nuovi operatori. Questo lavoro è presentato nelle pubblicazioni relative a *Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva* (1896, 1897 e 1901), in *Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica* (1906-07), in *Sulle omografie vettoriali* (1906-07), dove si introduce il concetto di omografia coniugata e si dimostra come gli ordinari *gradiente*, *rotazione*, *divergenza* siano funzioni di una

[1]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Analyse vectorielle générale: I, Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

unica omografia, la derivata rispetto al punto e infine in *Funzioni vettoriali* (1907-08). TAli concetti compaiono anche in alcuni lavori di geometria differenziale come ad esempio *Alcune nuove espressioni assolute della curvatura in un punto di una superficie* (1909); *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione* (1909); *Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei* (1909-10); *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (1909-10); *Alcune applicazioni alla geometria differenziale su di una superficie dell'operatore omografico C* (1910-11); e ancora *Sopra una formula generale per la trasformazione di integrali di omografie vettoriali* (1910-11); *Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali* (1911); *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali* (1911); *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale assoluto* (1912); *Isomerie vettoriali e moti geometrici* (1914), memoria di 37 pagine presentata all'Accademia delle Scienze di Torino; *Nuove applicazioni degli operatori* (1914-1915); *Sugli operatori differenziali omografici* (1916); fino ai lavori sulle iperomografie *Operatori per le iperomografie* (1921-1922); o le due note *Sugli spazi curvi* (1922).[2]

---

[2]Cfr. Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 10 (1896), 177-195; Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 64-82; Burali-Forti, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15 (1901), 310-320; Burali-Forti, Cesare, «Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1905-1906), 100-120; Burali-Forti, Cesare, «Sulle omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1907), 417-426; Burali-Forti, Cesare, «Funzioni vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 43 (1907-1908), 13-24; Burali-Forti, Cesare, «Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 50-55; Burali-Forti, Cesare, «Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 238-241; Burali-Forti, Cesare, «Sulla geometria differenziale assoluta delle congruenze e dei complessi rettilinei», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 45 (1909-1910), 4-22; Burali-Forti, Cesare, «Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 45 (1909-1910), 388-400; Burali-Forti, Cesare, «Alcune applicazioni alla geometria differenziale su di una superficie dell'operatore omografico C», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 46 (1910-1911), 461-481; Burali-Forti, Cesare, «Sopra una formula generale per la trasformazione di integrali di omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 46 (1910-1911), 745-765; Burali-Forti, Cesare, «Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 10-16; Burali-Forti, Cesare, «Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 641-648; Burali-Forti, Cesare, «Fondamenti per

5.3 *Omografie Vettoriali* (1909)

Il primo capitolo è dedicato alla teoria generale delle omografie vettoriali, il secondo alle derivate di numeri e di enti geometrici rispetto al punto di cui sono funzioni, ed il terzo all'applicazione di omografie e derivate alla trattazione assoluta di questioni di Meccanica e di Fisica-matematica.

Burali-Forti e Marcolongo osservano che le omografie vettoriali, contenute nelle più generali trasformazioni lineari, ben note come calcolo di determinanti e di matrici per mezzo delle coordinate, vengono qui trattate come enti assoluti e non come tachigrafie delle coordinate. Riferiscono che le derivate rispetto ad un punto non sono ancora molto note e citano come fonti il *Calcolo geometrico* di Peano e un lavoro di Carvallo pubblicato sui *Nouvelles Annales de Mathématiques*, dove si fa però uso delle coordinate.

Gli autori affermano che alcune delle questioni da loro trattate sono state svolte con i quaternioni, ma che questi, anche se costituiscono un sistema lineare (spazio vettoriale) a quattro dimensioni, non sono operatori lineari vettoriali; le omografie non possono quindi essere sostituite dai quaternioni, o soltanto in modo indiretto e quindi complicato. Occorre inoltre considerare trasformazioni lineari di vettori in omografie vettoriali, di una funzione di queste il gradiente, non può essere sostituito dai quaternioni, impiegandoli come enti assoluti, come sono stati dati dati da Hamilton invece che come tachigrafie delle coordinate. Per quanto riguarda l'opportunità dell'uso del sistema quaternionico, si fa riferimento ai lavori scritti in collaborazione con Marcolongo e pubblicati nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, «Per l'unificazione delle questioni vettoriali», oltre a «I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (1908) e «L'importance des transformations linéaires de vecteurs dans le calcul vectoriel général»su *L'Einsegnement Mathématique* (1908).

Si insiste spesso sul modo assoluto (corretto) di trattare i quaternioni da parte di Hamilton, mentre i quaternionisti ne hanno fatto poi cattivo uso.

Gli autori infine si augurano che come «La conoscenza dei metodi vet-

---

la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale assoluto», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33 (1912), 1-40; Burali-Forti, Cesare, «Sulla definizione di coppie, terne, ecc.», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (1) (1916), 405-413; Burali-Forti, Cesare, «Nuove applicazioni degli operatori», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 50 (1914-1915), 669-684; Burali-Forti, Cesare, «Sugli operatori differenziali omografici», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (2) (1916), 51-59; Burali-Forti, Cesare, «Operatori per le iperomografie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 57 (1921-1922), 285-292; Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 73-76; Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 181-184.

toriali si impone oramai non solamente al fisico e all'elettrotecnico (Galileo Ferraris), ma anche al cultore delle matematiche pure», potranno raggiungere il loro scopo se i lettori arriveranno alle stesse conclusioni per quanto riguarda le omografie vettoriali e le derivate, riconoscendo che le prime sono i naturali enti assoluti, geometrico-meccanici che sostituiscono gli ordinari invarianti, conseguenze soltanto dei sistemi di riferimento e che le seconde sono estensioni opportune al calcolo geometrico-meccanico, della geniale e feconda analisi di Leibniz.

Ringraziano infine il Prof. Boggio per i consigli e per la revisione delle bozze.

Dopo la prefazione, gli autori accludono alcune pagine di generalità sulle trasformazioni lineari, esponendo brevemente quanto riguarda i fondamenti della teoria generale delle trasformazioni lineari e delle sostituzioni, già note, ma riportate per precisare il significato dei termini di cui fanno uso e che sono adoperati da autori diversi con altri significati.

Definizioni:

a) Sistema lineare

b) Linearmente dipendente (dimensione di un sistema lineare)

c) Trasformazione (o operatore) lineare e sostituzione

d) Gli operatori lineari formano un sistema lineare

e) Operatore lineare prodotto (potenze per le sostituzioni)

[20.] Generalità

Se u è un ente funzione del punto P, appartenente ad un sistema lineare U, con la notazione leibniziana

$$\frac{du}{dP}$$

, indicano l'operatore lineare che applicato ad uno spostamento (vettore) infinitesimo qualsiasi dP di P produce l'incremento corrispondente du di u. (Si parla di derivate di elementi di un sistema lineare, ma si fanno anche derivate di un punto rispetto ad un'altro. u vettore $\frac{du}{dP}dP = du$

Dato un campo di vettori nello spazio mi sposto di una posizione infinitesimale da un punto ad un'altro e osservo la variazione del vettore. La derivata di u rispetto a P sarebbe una specie di differenziale, cioè un oggetto che esprime la potenziale variazione del vettore in una direzione qualunque dello spazio, questo oggetto che è una omografia vettoriale applicato ad un altro vettore dà la derivata direzionale cioè la variazione del vettore nella direzione indicata dal vettore su cui si applica.

[21.] Derivate di punti vettori e omografie

La derivata, rispetto al punto P, di un vettore u o di un punto Q, funzione di P, è se esiste, una omografia vettoriale. Invece la derivata, rispetto a P, di un'omografia α, funzione di P, è un operatore lineare che trasforma vettori in omografie. Quindi se x è vettore, $\frac{d\alpha}{dP}x$ è H.

$$\frac{d(\alpha u)}{dP}x = \alpha\frac{du}{dP}x + \left(\frac{d\alpha}{dP}x\right)u$$

La derivata di un punto si riduce comunque alla derivata di un vettore considerando l'origine come un punto costante

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{d(Q-O)}{dP}$$

[22.] Definizione di gradiente

Se è una omografia funzione di P, con la notazione $grad_P\alpha$ si indica il vettore $\left(\frac{d\alpha}{dP}i\right)i + \left(\frac{d\alpha}{dP}j\right)j + \left(\frac{d\alpha}{dP}k\right)k$

[24.] Simboli rot, div

$$rot u = rot_P u = 2V\frac{du}{dP}$$
$$div u = div_P u = 2I_1\frac{du}{dP}$$

Si definiscono così gli operatori rotazione e divergenza a partire dall'omografia derivata di un vettore rispetto ad un punto.

[26.] Espressioni con le coordinate

u vettore

$$\frac{du}{dP} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

5.4 *Analyse vectorielle générale* I e II. (1912-1913)

L'*Analyse vectorielle générale* si prospettava come una serie di volumi nei quali diversi autori esponevano temi di Meccanica, di Fisica-matematica e di Geometria differenziale. Del progetto iniziale che nel 1912 prevedeva un primo volume di *Transformations linéaires*, un secondo volume di *Applications Physico-Mécaniques* e un terzo d'*Hidrodynamique* scritto da Tommaso Boggio[3], si realizzarono soltanto i primi due volumi previsti *Transformations Linéaires* del 1912 e *Applications à la Mécanique et à la Physique* del 1913 più un quarto volume, redatto da Matteo Bottasso, dal titolo *Astatique* apparso nel 1915.

Nel volume *Transformations* compaiono anche delle Note geometriche curate da Mario Pieri, che illustrano il legame tra le omografie ed alcune proprietà proiettive già note. Alla fine del volume c'è anche una bibliografia che riporta i lavori pubblicati da autori diversi, del 1906 al 1912, facendo uso delle notazioni nuove e delle omografie vettoriali.

Introduzione del primo volume

L'introduzione del primo volume dell'*Analyse* disegna chiaramente il programma di lavoro, ed insiste sulle caratteristiche fondamentali della proposta degli autori, che hanno portato avanti un lavoro di confronto ragionato fra i diversi formalismi proposti.

Il primo volume prevede come temi centrali la trattazione degli argomenti seguenti:

- Algebra generale delle omografie vettoriali
- Derivate rispetto a un punto
- Trasformazioni di integrali
- Equazioni differenziali

La derivata di un elemento lineare rispetto ad un altro del quale è funzione era già stata considerata da Peano nel *Calcolo Geometrico*; le applicazioni comunque rendono necessaria l'introduzione del nuovo operatore: derivata

[3]Nella prefazione del volume *Logica Matematica* del 1919 Burali-Forti dice che il terzo volume della collana è in corso di stampa.

rispetto ad un punto, che non costituisce un sistema lineare (spazio vettoriale) ma una parte di esso (le formazioni di prima specie di Grassmann). Marcolongo nel suo necrologio di Burali-Forti, la indica infatti, come l'idea dalla quale prese spunto Burali-Forti per introdurre la derivata rispetto ad un punto, operatore centrale, come vedremo, del nuovo formalismo.

L'algebra delle operazioni vettoriali fondamentali, già esposta negli *Elementi di Calcolo vettoriale* del 1909 (ristampati in edizione francese con l'aggiunta di note nel volume *Eléments de Calcul vectoriel* del 1910), presenta i necessari fondamenti di tutti e due i volumi dell'*Analyse*.

Gli autori seguono le notazioni proposte tra il 1907 ed il 1909 perché considerano che sono state accolte favorevolmente da un considerevole gruppo di studiosi dei quali vengono riportati, non solo i nomi, ma anche l'elenco dei contributi apparsi negli ultimi sei anni.

Difendono un calcolo vettoriale la cui caratteristica principale è quella di non essere un mero «tachigrafo» delle coordinate, nel senso che non si tratta di un modo sintetico di esprimere con un solo simbolo ciò che ha una forma più complessa in coordinate.

Il loro calcolo non differisce dagli altri soltanto dal punto di vista delle notazioni, come hanno creduto alcuni autori che hanno partecipato al dibattito avvenuto sulle pagine de *L'Enseignement Mathématique*, ma fondamentalmente per il diverso «ruolo algoritmico»:

> «Si même on changeait –pour la forme seulement– nos symboles $\times$, $\wedge$, *grad*, *Rot*, ... contre des symboles choisis, p. ex., parmi ceux dont faisait usage les astrologues ou les alchimistes, notre calcul ne subirait encore aucune altération».[4]

Il loro calcolo può operare direttamente sugli elementi geometrici e fisici, senza avere bisogno di ricorrere ad alcun sistema di coordinate. Si può quindi chiamare intrinseco, assoluto, autonomo.

I vantaggi del calcolo intrinseco sono diversi:

Per trattare le questioni di fisica, di meccanica e di geometria, non c'è bisogno di far ricorso agli artifici particolari dipendenti dalla scelta delle coordinate, come si fa nelle esposizioni classiche o in quelle attuali che sembrano basare il loro successo in questo tipo di artifici.

Gli autori illustrano questo punto con due esempi che mettono a confronto i diversi tipi di approcci: a) uno tratto dal problema del movimento di una massa fluida incompressibile e un altro b) dall'elettrodinamica.

[4]Cfr. Préface, VII.

a) Nella memoria sul problema del movimento di una massa fluida incompressibile di Stekloff si ottengono dei risultati importanti mediante due sistemi di coordinate, l'uno fisso e l'altro mobile, e dopo una lunga serie di calcoli che vengono riprodotti soltanto in parte. Lo stesso problema è stato affrontato da Boggio che ha ottenuto in forma molto più semplice i risultati senza fare uso di assi, con dei calcoli molto lievi, che vengono interamente riportati in nota. L'ellissoide è rappresentato dalla sua omografia indicatrice, che entra direttamente nel calcolo. Il successo di Boggio è dovuto all'assenza completa di assi coordinati e *all'introduzione diretta nel calcolo degli elementi sui quali si opera* e non alla particolare scelta degli elementi di riferimento.

b) Per quanto riguarda l'elettrodinamica gli autori vedono l'artificio nell'introduzione dei vettori a 4 dimensioni, alla quale si attribuisce il successo di certe ricerche di elettrodinamica. Questi vettori sono ottenuti per mezzo delle coordinate, che non sono omogenee (lunghezza e tempo). In certe questioni fisiche è necessario che una coordinata sia immaginaria. ($\sqrt{-1}$ che non bisogna confondere con il versore i di Hamilton che è un operatore reale assolutamente diverso da $\sqrt{-1}$). Tutto è stato ottenuto (Marcolongo) mediante vettori (fisici) a tre dimensioni, in modo nuovo, semplice e chiaro geometricamente e fisicamente. Non ci possono essere dubbi sull'inutilità assoluta dei vettori a quattro dimensioni nel campo della fisica. (Che i vettori a quattro dimensioni siano degli oggetti puramente analitici, risulta dal fatto che bisogna introdurre $\sqrt{-1}$ che non può avere una rappresentazione *assoluta* reale; i vettori a n dimensioni si possono invece introdurre in forma geometrica indipendente dalle coordinate; Bottasso si sta occupando di tale argomento). Il successo in questo caso viene dall'aver escluso tutte le coordinate, anche quelle immaginarie, e di operare direttamente con gli elementi fisico-geometrici.

Le coordinate cartesiane sono uno svantaggio se si usano sistematicamente, ma per alcune questioni particolari possono essere introdotte utilmente.

«Le calcul vectoriel peut ne pas faire usage de coordonnées mais il est prêt à les donner de quelque espèce qu'elles soient, et d'une manière très simple, chaque fois qu'elles lui sont demandées».[5]

Il calcolo vettoriale quindi non esclude le coordinate.

Gli operatori differenziali sono di grande importanza per il calcolo vettoriale. Sono dedotti da un unico operatore che è la derivata di un elemento h

[5]Cfr. Préface, IX.

rispetto ad un punto P, del quale h è funzione, operatore indicato seguendo Leibniz con $\dfrac{d}{dP}$.

Se h è un punto o un vettore, allora la $\dfrac{dh}{dP}$ è un'omografia, l'invariante primo e il vettore doppio della quale, rispettivamente sono, la divergenza ed il rotore di h. Se h è una omografia, $\dfrac{dh}{dP}$ è un operatore che applicato ad un vettore dà una omografia. Questa omografia è di continuo uso nelle applicazioni ed è tramite essa che si definisce indipendentemente dalle coordinate, il gradiente ed il rotore di un'omografia.

Anche gli operatori Δ e Δ', il primo per le omografie ed il secondo per i vettori, che hanno come tachigrafo comune l'operatore di Laplace, sono definiti mediante l'operatore $\dfrac{d}{dP}$ indipendente dalle coordinate. Dalla loro definizione intrinseca è evidente che si tratta di due operatori diversi che non possono essere rappresentati con un unico simbolo Δ_2 oppure ∇^2.

Esaminano poi i sistemi vettoriali ordinari paragonandoli con il loro: di Hamilton ammirano la costruzione indipendente dalle coordinate che considerano degna di ammirazione per la precisione di idee e di notazioni per quanto riguarda la teoria dei vettori e dei quaternioni costanti. Per le funzioni di un punto, invece, ricorre alle coordinate. Il suo nabla ∇, che è l'operatore differenziale fondamentale, non può essere definito escludendo le coordinate.

Anche le omografie (Φ) vengono definite per mezzo delle coordinate cartesiane. Manca la possibilità di creare un calcolo intrinseco.

I quaternioni non possono dare da soli le omografie generali. Le omografie sono operatori vettoriali a 9 dimensioni in un dominio a 3 dimensioni, mentre i quaternioni sono operatori vettoriali lineari a 4 dimensioni in un dominio a 2 dimensioni (che è funzione del quaternione stesso). Inoltre la somma e il prodotto di due quaternioni hanno il dominio ridotto ad una sola dimensione. I quaternioni sono quindi insufficienti per il calcolo vettoriale intrinseco. *I quaternionisti moderni* non aggiungono niente al mirabile edificio elevato da Hamilton: da una parte hanno le stesse limitazioni del sistema originale e dall'altra avendo soppresso i necessari operatori I, I^{-1} di Hamilton identificano il quaternione destro con il vettore, ciò che costituisce una vera assurdità. Altri non fanno uso dei quaternioni ma utilizzano le notazioni esatte ed opportune di Hamilton $S(uv)$ e $V(uv)$ privandole di senso.

Gibbs ha il merito di avere fatto uso per primo del *simbolo di operazione* per il *prodotto vettoriale* invece della funzione binaria.

Non hanno fatto uso dei simboli . e $\times$ di Gibbs perché il punto . in algebra ha già funzione di separazione e Grassmann aveva già usato $\times$ come prodotto interno.

Gli operatori differenziali di Gibbs sono però dei tachigrafi cartesiani, soggetti a leggi formali poco precise, il ∇ è diventato un vettore simbolico ed ha perso completamente la precisione del nabla. Le omografie sono definite tramite le diadi che non sono però indipendenti dalle nove coordinate cartesiane. Le diadi che corrispondono alle nostre omografie $H(u, v)$, sono delle omografie non reversibili e formano un sistema non lineare [non costituiscono uno spazio vettoriale]. Con la somma di tre fra loro si ottengono le omografie che formano un sistema lineare [spazio vettoriale]. Non deve quindi sorprendere che il calcolo di Gibbs presenti grosse complicazioni che non si trovano nel nostro sistema.

Gibbs deve sempre scomporre un'omografia nella somma di tre diadi, mentre noi in generale non abbiamo bisogno di scomposizioni, o troviamo utile la scomposizione nella somma di una dilatazione e di una omografia assiale.

Il paragone fra le applicazioni fatte da Gibbs, o dai suoi discepoli, e le nostre, prova ampiamente che anche il sistema di Gibbs è insufficiente e poco opportuno.

Esistono altri sistemi ancora più difettosi e meno opportuni di quelli che abbiamo appena citato. Le notazioni a sistema cellulare (ab), $[ab]$ proposti dall'Enciclopedia tedesca sono molto inferiori a tutti gli altri. Le parentesi costituiscono contrariamente a tutte le leggi ordinarie dell'algebra il simbolo di funzione binaria! Si ha per esempio come conseguenza, che la formula $([ab]c) = (a[bc])$ che dovrebbe esprimere una proprietà commutativa, sembra al contrario esprimere una proprietà associativa per mezzo di un lusso inutile di parentesi.

Senza paura di sbagliare e con l'esempio convincente fornito dalle numerose applicazioni in tutti i campi della meccanica, della Fisica-matematica e della Geometria-differenziale, affermano che nessuno dei sistemi vettoriali ordinari possiede la semplicità, la precisione, l'indipendenza assoluta dagli elementi di riferimento, né la potenza del loro sistema. Non si escludono la possibilità di trovare un sistema più semplice e più potente del loro, ma non sarà sicuramente fra quelli già esistenti.

Concludono con l'osservazione che ovviamente il sistema geometrico di Grassmann-Peano nel quale il loro è contenuto e che può essere dedotto dal loro è escluso dai sistemi insufficienti o imperfetti che hanno appena preso in considerazione.

Introduzione al Capitolo I

Sistemi e operatori lineari

Gli autori espongono in questo capitolo la teoria dei sistemi lineari. Questi concetti erano stati esposti per la prima volta da Peano, nel *Calcolo geometrico* del 1888 e vengono qui riportati per comodità del lettore e per chiarire il significato che viene assegnato ad ogni termine.

Sia U una classe, siano $a, b, c, \dots$ elementi qualunque di questa classe e $m, n, \dots$ numeri reali. Si definisca la somma $a+b$ di due elementi qualunque di U e il prodotto $m\,a$ o $a\,m$, di un elemento a qualunque di U per un numero reale m di modo che siano verificate le condizioni seguenti:

1. $a + b$ è un elemento dato di U.
2. Esiste un elemento di U che si indica con 0 (zero), nullo relativamente all'operazione $+$, tale quindi che se a è un elemento qualunque di U, $a + 0 = a$.
3. $a + b = b + a$.
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$.
5. $a + b = b + c$ equivale a $a = c$.
6. ma (o am) è un elemento determinato di U.
7. $ma = 0$ equivale a $a = 0$ o $m = 0$.
8. Se $m \neq 0$, $ma = mb$ equivale a $m = n$. Se $a \neq 0$, $ma = mb$ equivale a $m = n$.
9. $m(a + b) = ma + mb$, $(m + n)a = ma + na$

Tutte le condizioni suddette si esprimono in forma sintetica dicendo che gli U formano un *sistema lineare* rispetto all'operazione $+$.

Se U è un sistema lineare, si ha relativamente all'operazione $+$, $-a = (-1)a$, $a - b = a + (-b)$: e per U si ha l'algoritmo algebrico delle operazioni somma, differenza e prodotto per un numero reale. I vettori, le formazioni geometriche di Grassmann, i quaternioni, i numeri complessi, ecc. sono formazioni lineari. I punti, i numeri irrazionali, i razionali non interi, ecc., non sono dei sistemi lineari, perché la somma di due punti non è un punto, la somma di due irrazionali può essere un razionale ecc.

Dimensioni di un sistema lineare

Vengono poi definiti i concetti di dipendenza ed indipendenza lineare e quindi la dimensione di un sistema lineare: Gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_n$ del sistema lineare U, si dicono linearmente dipendenti (*linéairement associés*) se esistono dei numeri reali non tutti nulli $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = 0$$

Si dirà che il sistema ha n dimensioni quando: contiene n elementi non linearmente dipendenti (*non linéairement associés*) e $n+1$ elementi qualunque sono sempre linearmente dipendenti.

I numeri reali, i vettori paralleli ad una retta, ... formano sistemi ad una dimensione. I vettori paralleli ad un piano, i numeri complessi $(a+\sqrt{-1}b)\dots$, formano dei sistemi a due dimensioni. I vettori dello spazio formano un sistema a tre dimensioni. I quaternioni, le forme di prima e di terza specie di Grassmann formano dei sistemi a quattro dimensioni; le forme di seconda specie formano dei sistemi a sei dimensioni; ecc. Se il sistema lineare U ha n dimensioni e $a_1, a_2, \dots, a_n$ sono degli elementi di U linearmente indipendenti (c'est à-dire non linéairement associés) allora: essendo a un elemento qualunque di U, sono determinati in modo unico dei numeri (tutti nulli solo se $a = 0$), tali che

$$a = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$$

Operatori

Dati due sistemi qualunque di elementi U e U' si dice che α è un operatore (o simbolo di funzione) tra U e U' quando dato un elemento a qualunque di U, αa indica un elemento qualunque di U' dipendente da a e dall'operatore α. L'operatore si scriverà sempre a sinistra dell'elemento sul quale opera. Seguendo Hamilton, Lagrange e Abel si scriverà αa invece di $\alpha(a)$. Si dirà $\alpha = \beta$ se per un a qualunque di U $\alpha a = \beta a$. $\alpha = 0$, per qualunque a se $\alpha a = 0$. α operatore per le U, a, b elementi di U, $a = b$ implica $\alpha a = \alpha b$. Se α è un operatore reversibile allora α^{-1} indica l'inverso di α cioè l'operatore tale che $\alpha a = a'$ implica $\alpha^{-1}a' = a$

Operatori lineari

Se U e U' sono sistemi lineari, l'operatore $\alpha(a)$ tra U e U' si chiama operatore lineare se

$$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b,\ \alpha(ma) = m(\alpha a)$$

cioè quando è distributivo rispetto alla somma e commutativo rispetto al prodotto per un numero.

Sostituzioni

Se U è un sistema lineare, allora un sistema lineare fra U e U si chiama sostituzione lineare. Se per un momento indichiamo moa (m volte a) Si ha che il prodotto per un numero reale è una sostituzione per le U. I numeri reali sono sostituzioni per un sistema lineare qualunque (non i numeri reali in sé ma il numero seguito da un segno di operazione, cioè il prodotto per un numero).

Somma e prodotto di operatori lineari

Siano U, U', U'' sistemi lineari, α, β operatori lineari tra U e U' e γ operatore lineare tra U' e U'', con la notazione: $\alpha + \beta$ somma di α e β $\gamma\alpha$ prodotto (funzionale) di α per γ indichiamo l'operatore rispettivamente tra gli U e gli U', tale che, a elemento arbitrario di U si ha

$$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$$

$$(\gamma\alpha)a = \gamma(\alpha a)$$

La somma e il prodotto di operatori lineari sono ancora degli operatori lineari. La somma è commutativa ed associativa e il prodotto è associativo e distributivo rispetto alla somma

$$\gamma(\alpha + \beta) = \gamma\alpha + \gamma\beta$$

ma non è in generale commutativo. Se m è un numero reale, in virtù di n. 5, gli operatori $m\alpha$ e αm ($m\alpha = \alpha m$) sono definiti. Risulta quindi che: gli operatori lineari tra due sistemi lineari qualunque formano ancora dei sistemi lineari.

Potenze delle sostituzioni

Se α è una sostituzione per le U, si possono definire le potenze di α come in algebra

$$\alpha^0 = 1, \alpha^1 = \alpha, \alpha^2 = \alpha\alpha, \alpha^3 = \alpha(\alpha^2)$$

Se α è reversibile $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$. Si ha $\alpha^m\alpha^n = \alpha^{m+n}$, dato che il prodotto è associativo, ma in generale

$$(\beta\alpha)^n \neq \beta^n\alpha^n$$

perché il prodotto non è commutativo. Se α e β sono sostituzioni reversibili per le U si ha:

$$(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$$

Operatori lineari alternati

Se U e U' sono dei sistemi lineari qualunque, si dice che α è un operatore tra n-ple ordinate di U e di U' se avendo fissato una successione $a_1, a_2, \dots a_n$ di elementi di U

$$\alpha(a_1, a_2, \dots a_n)$$

è un elemento determinato di U' che dipende da $a_1, a_2, \dots a_n$ e dall'operatore α. Se U' e U sono sistemi lineari, si dirà α operatore lineare, se è lineare rispetto a ciascuna delle variabili. [operatore multilineare].

Nelle stesse ipotesi α si chiama operatore lineare alternato tra n-ple ordinate di U e di U' quando: essendo α un operatore e $a_1, a_2, \dots a_n$, una successione arbitraria di elementi di U, la funzione $\alpha(a_1, a_2, \dots a_n)$ cambia di segno ma non in valore assoluto, cambiando di posto due elementi qualunque della successione, cioè:

$$\alpha(a_1 \dots a_r \dots a_s \dots a_n) = -\alpha(a_1 \dots a_s \dots a_r \dots a_n)$$

r e s qualunque ma $r \neq s$.

Si vede subito come nella teoria dei determinanti che se nella successione degli a, ci sono degli elementi uguali, o uno multiplo dell'altro, allora

$$\alpha(a_1, a_2, \dots a_n) = 0$$

Se gli elementi a_r sono espressi linearmente mediante gli elementi b_r tali che

$$a_r = m_{r1}b_1 + m_{r2}b_2 + \cdots + m_{rn}b_n, \ (r = 1, 2, \dots, n)$$

e M è il determinante formato con gli m_{rs} allora

$$\alpha(a_1, a_2, \dots a_n) = M\alpha(b_1, b_2, \dots b_n)$$

Capitolo I - Omografie vettoriali

Definizione di omografia vettoriale

Chiamiamo omografie vettoriali o semplicemente omografie le sostituzioni per i vettori (dello spazio), cioè gli operatori lineari che trasformano vettori in vettori.

I vettori formano un sistema lineare a tre dimensioni per cui: ogni omografia trasforma vettori paralleli ad un piano (linearmente dipendenti) in vettori paralleli allo stesso piano; ogni omografia può essere individuata da tre vettori non paralleli allo stesso piano (linearmente indipendenti).

In particolare la moltiplicazione per un numero reale è un'omografia (ordinariamente si dice anche in modo inesatto che ogni numero reale è un'omografia).

Omografie proprie e singolari

Si dice omografia *propria* quella che trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti (non paralleli in non paralleli). L'omografia si dice singolare in caso contrario: esistono almeno tre vettori paralleli ad un piano che sono trasformati in vettori paralleli ad un piano. Un'omografia *singolare* trasforma ogni gruppo di vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti.

Un modo per caratterizzare un'omografia singolare è il seguente:

α è omografia singolare, se e solo se dato u vettore non nullo si ha $\alpha u = 0$. Le omografie proprie sono sempre reversibili, mentre le omografie singolari non lo sono mai.

Direzioni doppie

Una direzione si dice doppia o unita per l'omografia α: se u vettore non nullo, parallelo a questa direzione, è tale che αu è multiplo di u.

$$\alpha u = mu$$

m reale comprendente lo zero. Ogni omografia ammette sempre almeno una direzione doppia.

Omografie semplici

Omotezie vettoriali (numeri reali):

α è una omotetia vettoriale se esiste m tale che x vettore $\alpha x = mx$.

Omografie assiali

α omografia assiale[6] se esiste un vettore u tale che comunque sia dato il vettore x $\alpha x = u \wedge x$ L'omografia $u\wedge$ trasforma un vettore qualunque in un vettore normale ad u, per cui le omografie assiali sono singolari.

Si ha

$$\begin{cases} u\wedge = 0 & \text{solo se} \quad u = 0 \\ u\wedge = v\wedge & \text{solo se} \quad u = v \end{cases}$$

Diadi

u e v vettori, l'operatore α tra vettori e vettori definito come

$$\text{(a)}\ \alpha x = u \times x.v$$

con x vettore arbitrario è un'omografia.

L'operatore α definito da (a) e funzione di u e v in questo ordine, si dice *diade* determinata dalla successione u, v e viene indicata con $H(u, v)$[7], quindi si ha $H(u, v)x = u \times x.v$

La diade $H(u, v)$ trasforma un vettore qualunque in un vettore multiplo di v e quindi le diadi sono omografie singolari. u, v vettori, $H(u, v) = 0$ solo se $u = 0$ e $v = 0$.

Se i, j, k è un sistema ortogonale destrogiro, α è un'omografia qualunque, si ha l'identità

$$\alpha = H(i, \alpha i) + H(j, \alpha j) + H(k, \alpha k)$$

$$\text{se} \quad \alpha = 1, \quad H(i, i) + H(j, j) + H(k, k) = 1$$

La somma di due diadi non è necessariamente una diade, per cui le diadi non formano un sistema lineare.

[6] Gibbs considera delle diadi «anti-self-conjugate» che corrispondono alle assiali.

[7] «En hommage à GIBBS, nous appelons *Dyade* l'homographie individuée par les vecteurs u, v dans l'ordre u, v. La définition de *Dyade* et de *Dyadique* est donnée par GIBBS, d'une manière si incertaine, qu'il n'est pas possible d'affirmer si notre symbole, *défini exactement*, $H(u, v)$ correspond à $(vu)\times$ ou à vu de GIBBS.» Cfr. Chapitre I, 17.

Dilatazioni

α omografia è una dilatazione, se dati x e y vettori arbitrari si ha

$$x \times \alpha y = y \times \alpha x$$

Le dilatazioni formano un sistema lineare.

Se α è una dilatazione, esiste almeno un sistema ortogonale destrogiro i, j, k e dei numeri reali m, n, p tali che

$$\alpha \;=\left(\begin{array}{ccc} mi & nj & pk \\ i & j & k \end{array}\right)$$

Le direzioni dei vettori i, j, k (funzioni di α) sono doppie per α e si chiamano anche *direzioni principali* della dilatazione α.

Generalità sugli operatori fondamentali per le omografie

Dopo questo punto in poi gli autori introducono una serie di operatori fra omografie e le loro proprietà di modo che il formalismo diventa sempre più complicato. Vediamo di capire i criteri che li guidano al momento di introdurre i diversi operatori.

Definizione degli operatori I, V, D, K, C

Sia α un'omografia qualunque. Chiamiamo *primo, secondo e terzo invariante* di α e li indichiamo con la notazione

$$I_1 \; I_2 \; I_3$$

i numeri reali tali che dati u, v, w vettori arbitrari, verificano le condizioni

$$\left\{\begin{array}{c} u \wedge v \times w I_1 \alpha = u \wedge w \times \alpha u + w \wedge u \times w\alpha v + u \wedge v \times \alpha w \\ u \wedge v \times w I_2 \alpha = (\alpha v) \wedge (\alpha w) \times u + (\alpha w) \wedge (\alpha u) \times v + (\alpha u) \wedge (\alpha v) \times w \\ u \wedge v \times w I_3 \alpha = (\alpha v) \wedge (\alpha w) \times \alpha w \end{array}\right.$$

Chiamiamo *vettore di* α, e lo indichiamo con la notazione

$$V\alpha,$$

il vettore tale che dati u, v vettori arbitrari, verifica la condizione

$$2V\alpha \times u \wedge v = v \times \alpha u - u\alpha v$$

Chiamiamo *dilatazione di* α, coniugata di α, ciclica di α, e le indichiamo con le notazioni

$$D\alpha, K\alpha, C\alpha$$

le omografie definite come

$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha - V\alpha\wedge \\ K\alpha &= D\alpha - V\alpha\wedge \\ C\alpha &= I_1\alpha - \alpha \end{aligned}$$

Un'omografia qualunque si può sempre scomporre in modo unico come somma di una dilatazione e di un'omografia assiale. Le formule che realizzano questa scomposizione per l'omografia e per la coniugata sono le seguenti:

$$\alpha = D\alpha + V\alpha\wedge$$

$$K\alpha = D\alpha - V\alpha\wedge$$

Si deduce che α è una dilatazione soltanto se $V\alpha = 0$, α è una dilatazione soltanto se $K\alpha = \alpha$, α è un'omografia assiale soltanto se $D\alpha = 0$, α è un'omografia assiale soltanto se $K\alpha = -\alpha$. Gli operatori I_1, V, D, K, C sono operatori lineari, gli operatori K, C sono reversibili.

Gli invarianti di un'omografia si possono calcolare facilmente se si conoscono i vettori che si ottengono applicando α a tre vettori linearmente indipendenti o in particolare ai tre vettori di un sistema ortogonale destrogiro come risulta dalle formule seguenti:

$$\begin{cases} I_1\alpha = \dfrac{u\wedge w\times\alpha u + w\wedge u\times w\alpha v + u\wedge v\times\alpha w}{u\wedge v\times w} \\ I_2\alpha = \dfrac{(\alpha v)\wedge(\alpha w)\times u + (\alpha w)\wedge(\alpha u)\times v + (\alpha u)\wedge(\alpha v)\times w}{u\wedge v\times w} \\ I_3\alpha = \dfrac{(\alpha v)\wedge(\alpha w)\times\alpha w}{u\wedge v\times w} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1\alpha = i\times\alpha i + j\times\alpha j + k\times\alpha k \\ I_2\alpha = (\alpha j)\wedge(\alpha k)\times i + (\alpha k)\wedge(\alpha i)\times j + (\alpha i)\wedge(\alpha j)\times k \\ I_3\alpha = (\alpha i)\wedge(\alpha j)\times\alpha k \end{cases}$$

Quadriche indicatrici

Sia α un'omografia, O un punto, k un numero reale. La quadrica, luogo dei punti P per i quali

$$(P-O)\times\alpha(P-O) = k,$$

si chiama quadrica indicatrice di α rispetto al punto O e al numero k.

Principali proprietà degli operatori fondamentali

Se α è un'omografia tra le sue potenze fino alla terza ed i suoi invarianti, sussiste sempre la relazione:

$$\alpha^3 - I_1\alpha.\alpha^2 + I_2\alpha.\alpha - I_3\alpha = 0$$

Si fa continuo uso sia nella parte teorica che nella applicazioni fisiche meccaniche e geometriche del teorema di commutazione che si esprime con la formula seguente:

$$x \times \alpha y = y \times K\alpha x$$

Per la coniugata di un prodotto si hanno le formule

$$K(\beta\alpha) = K\alpha.K\beta$$

$$K\alpha^n = (K\alpha)^n$$

Operatore R per le omografie

Se α è un'omografia e x e y sono due vettori, il vettore $(\alpha x) \wedge \alpha y$ è una funzione alternata di x e y. Esiste quindi (cfr. Int. N.9 teor.1) un'omografia indipendente da x e y, funzione soltanto di α, che applicata al vettore $x \wedge y$ dà il vettore $(\alpha x) \wedge \alpha y$. Questo operatore lo indichiamo con la notazione $R\alpha$, e risulta quindi che $R\alpha$ è un'omografia funzione soltanto di α tale che dati x e y vettori arbitrari si ha sempre

$$R\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge \alpha y$$

R dunque è un operatore tra omografie e omografie.

Isomerie e similitudini vettoriali

Chiamiamo *isomerie vettoriali* quelle omografie che non fanno variare la lunghezza (o modulo) del vettore a cui si applicano.

I criteri pratici che permettono di riconoscere se un'omografia α è un'isomeria vettoriale sono dati dai teoremi seguenti:

L'omografia α è un'isomeria vettoriale soltanto se si ha

$$(\alpha u)^2 = u^2.$$

essendo u un vettore arbitrario, oppure in modo equivalente se, comunque scelti i vettori u e v si ha

$$(\alpha u) \times \alpha v = u \times v$$

dalla quale discende anche $cos(\alpha u, \alpha v) = cos(u, v)$. $ang(\alpha u, \alpha v) = ang(u, v)$ dal che risulta che le isomerie vettoriali conservano le lunghezze e gli angoli.

L'omografia α è un'isomeria vettoriale soltanto se

$$K\alpha = \alpha^{-1}$$

oppure ciò che è la stessa cosa

$$\alpha.K\alpha = K\alpha.\alpha = 1$$

Introduzione al Capitolo II

Funzioni, limiti, differenziali e derivate

Nel corso di questa introduzione ammettiamo le seguenti ipotesi: U e V sono tali che i loro elementi formano sistemi lineari o parti non lineari di sistemi lineari (es. i razionali non interi, gli irrazionali o i punti). La classe formata dagli elementi che sono differenze di elementi della classe U –che indicheremo con diff U– è un sistema lineare. (Es. Se U è la classe dei punti, parte non lineare del sistema formato dalle formazioni geometriche di Grassmann di prima specie, diff U è la classe dei vettori, che formano un sistema lineare).

Funzioni

Dato un elemento qualunque della classe U, si determina un elemento della classe V, tale che, come in analisi, a è una V funzione degli U, $a = fp$ o $a = f(p)$.

Si può considerare una V funzione di più variabili di una classe o di classi diverse.

Sia α un operatore funzione degli U che applicato agli elementi della classe V da un elemento di un sistema lineare. In questa ipotesi, si dirà che α è un operatore lineare per la V funzioni degli U se, essendo p un elemento arbitrario di U, le relazioni

$$\alpha(fp + \varphi p) = \alpha fp + \alpha\varphi p,\ \alpha(mp.fp) = mp(\alpha fp)$$

sono verificate comunque siano dati gli operatori f e φ tra gli U e i V e qualunque sia l'operatore m tra gli U ed i numeri reali.

Differenziali

Sia fp una V funzione che varia in un campo Σ contenuto nella classe degli U. Se u è un elemento della classe diff U, si chiama differenziale di fp relativamente a u il

$$\lim_{h=0} \frac{f(p+hu)-fp}{h}$$

dove h varia in modo che $p+hu$ appartenga a Σ.

Se f è l'identità allora si ha:

che il differenziale di p relativamente a u è uguale a u. Cioè ogni elemento della classe diff U è un differenziale di p. Seguendo la notazione usuale di Leibniz indicheremo con

$$dp, \delta p, \theta p, \ldots$$

dei differenziali arbitrari di p, cioè degli elementi arbitrari della classe diff U. I differenziali successivi sono in generale commutabili

$$d\delta p = \delta dp$$

Derivate

Sia $a = fp$ una V funzione dell'elemento p che varia nel campo Σ.

Chiameremo derivata di a rispetto a p e la indicheremo con il simbolo di Leibniz di

$$\frac{da}{dp} \text{ o } \frac{d}{dp}a$$

l'operatore lineare con le seguenti proprietà:

1° Se si applica ad un elemento qualunque della classe diff U appartenente a Σ, dà un V determinato.

2° Se si applica ad un differenziale qualunque $dp, \delta p, \theta p, \ldots$ di p, dà il differenziale corrispondente di a; cioè

$$\frac{da}{dp}dp = da, \ \frac{da}{dp}\delta p = da, \ \frac{da}{dp}\theta p = da$$

Se $\frac{da}{dp}$ esiste è un operatore lineare tra gli elementi di diff U e gli elementi di V (Si verificano le proprietà di linearità).

Se l'operatore $\frac{da}{dp}$ esiste è unico. Se U e V coincidono con i reali allora $\frac{da}{dp}$ è la derivata ordinaria.

Capitolo II -Funzioni dei punti e loro derivate

Derivate di punti, vettori e omografie

Sia P un punto variabile in un campo continuo Σ a tre dimensioni, Q un punto fisso, u vettore, α omografia vettoriale funzione di P.

La derivata di Q, u, α rispetto a P sono come sappiamo gli operatori lineari:

$$\frac{dQ}{dP}\ \frac{du}{dP}\ \frac{d\alpha}{dP}$$

che applicati ad un differenziale arbitrario vettore δP di P danno il differenziale corrispondente $dQ, du, d\alpha$ di Q, u, α.

$$\frac{dQ}{dP}\delta P = dQ,\ \frac{du}{dP}\delta P = da,\ \frac{d\alpha}{dP}\delta P = d\alpha$$

Se queste derivate esistono, sono univocamente determinate almeno all'interno del campo Σ, dato che in questo campo si possono sempre dare 3 differenziali (vettori) di P non paralleli a uno stesso piano.

È di grande importanza considerare la specie degli operatori, altrimenti si rischia di commettere degli errori gravi. Per esempio si possono formare degli operatori che come quelli comunemente usati, non soddisfanno alle leggi semplici e generali degli operatori funzionali.

Le derivate di punti e di vettori rispetto ad un punto del quale sono funzioni sono delle omografie vettoriali.

$\frac{dQ}{dP}$ opera solo sulla classe dei diff di punti cioè sulla classe dei vettori, come $\frac{du}{dP}$ ed inoltre sono degli operatori lineari. (Int. II n5).

La derivata di un punto si può sempre ridurre alla derivata di un vettore

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{d(Q-O)}{dP}$$

La derivata di una omografia rispetto al punto del quale è funzione è un operatore tra vettori e omografie. $\frac{d\alpha}{dP}$ è un operatore lineare tra vettori e omografie e $\frac{d\alpha}{dP}x$ è una omografia vettoriale.

Derivata rispetto ad una direzione data

Se h è un punto, vettore, omografia, e u un vettore unitario

$$\frac{dh}{dP}u = \text{alla derivata di } h \text{ nella direzione di } u$$

Derivata di un prodotto vettoriale o interno

$$\frac{d}{dP}(u \wedge v) = u \wedge \frac{dv}{dP} - v \wedge \frac{du}{dP}$$

$$\frac{d}{dP}(u \times v) = \left(K\frac{du}{dP}v\right) \times + \left(K\frac{dv}{dP}u\right) \times$$

$$\frac{du^2}{dP} = 2\left(K\frac{du}{dP}u\right) \times$$

$$\frac{d(mod\, u)}{dP} = \left\{K\frac{du}{dP}\left(\frac{u}{mod\, u}\right)\right\} \times$$

Derivate di prodotti funzionali

α, β omografie, u vettore, x vettore arbitrario

$$\frac{d(\alpha u)}{dP}x = \alpha\frac{du}{dP}x + \left(\frac{d\alpha}{dP}x\right)u$$

$$\frac{d(\beta\alpha)}{dP}x = \beta\frac{d\alpha}{dP}x + \left(\frac{d\beta}{dP}x\right)\alpha$$

$$\frac{d\alpha^{-1}}{dP}x = -\alpha^{-1}\left(\frac{d\alpha}{dP}\right)\alpha^{-1}$$

Generalità sugli operatori differenziali di primo ordine *rot*, *div*, *grad*, *Rot*

Definizioni

U vettore funzione di P, chiamiamo rotazione di u e divergenza di u relativamente a P e li indicheremo con

$$rot_P u \quad \text{e} \quad div_P u$$

rispettivamente il vettore ed il numero reale

$$rot_P u = 2V\frac{du}{dP}$$

$$div_P u = 2I_1\frac{du}{dP}$$

Se α è una omografia, funzione di P, chiameremo gradiente di α e rotazionale di α relativamente a P e li indicheremo con

$$grad_P\alpha \quad \text{e} \quad Rot_P\alpha$$

rispettivamente il vettore e l'omografia funzione soltanto di P determinati dalle condizioni seguenti, con x vettore arbitrario

$$grad_P\alpha \times x = I_1\left\{\frac{d(K\alpha x)}{dP} - K\alpha.\frac{dx}{dP}\right\}$$

$$(Rot_P\alpha)\,x = 2V\left\{\frac{d(\alpha x)}{dP} - \alpha\frac{dx}{dP}\right\}$$

Se non c'è possibilità di confusione scriveremo semplicemente $rotu$, $divu$, $grad\alpha$, $Rot\alpha$.

Abbreviazioni

$$S(\alpha, x) = \frac{d}{dP}(\alpha x) - \alpha\frac{dx}{dP}$$

$$S(\alpha, x)y = \left(\frac{d\alpha}{dP}y\right)x$$

Se i, j, k formano un sistema ortogonale-unitario-destrogiro (funzione di P)

$$grad\alpha = \left(\frac{d\alpha}{dP}i\right)i + \left(\frac{d\alpha}{dP}j\right)j + \left(\frac{d\alpha}{dP}k\right)k$$

$$Rot\alpha = i \wedge \frac{d\alpha}{dP}i + j \wedge \frac{d\alpha}{dP}j + k \wedge \frac{d\alpha}{dP}k$$

È importante ricordare che

rot è un operatore tra vettori e vettori

div è un operatore tra vettori e numeri

grad è un operatore tra omografie e vettori

Rot è un operatore tra omografie e omografie

5.5 Ricezione

Nel 1913 comparirà una recensione del primo volume dell'*Analyse Vectorielle Générale* ad opera di Matteo Bottasso[8] nella quale si ripropone fondamentalmente ciò che gli autori hanno discusso nella loro introduzione, insieme

[8] Cfr. BOTTASSO, Matteo, «Burali-Forti, Cesare; Marcolongo, Roberto, «Analyse Vectorielle Générale. Vol. I. Transformations linéaires. Pavie, Mattei, 1912», *Bullettin des Sciences Mathématiques*, 37 (1913), 179-184.

ad una spiegazione della struttura del libro. Bottasso recensirà per la stessa rivista anche il secondo volume dell'opera e i due volumi per il *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* di G. Loria.

Più interessanti di queste recensioni dell'autore del volume intitolato *Astatique* della collana, sono a nostro avviso gli elenchi di pubblicazioni che Burali-Forti e Marcolongo (e anche Bottasso) riportano alla fine di ciascuno dei volumi della collezione. Si tratta (fino alla seconda edizione degli *Elementi di calcolo vettoriale* del 1921) di 246 riferimenti bibliografici di autori che hanno usato i metodi del calcolo vettoriale o le omografie vettoriali nei loro lavori.[9]

5.6 Conclusione

C. Burali-Forti e R. Marcolongo nel *Analyse Vectorielle Générale* sistematizzano i loro lavori sulle trasformazioni lineari di vettori, sviluppandone da un lato la parte teorica e dall'altro le applicazioni. Il lavoro non si arresta al punto in cui noi lo abbiamo lasciato.[10] Infatti come abbiamo detto gli autori continueranno a rielaborare i loro contributi in argomento nel corso degli anni fino a generalizzare le omografie come iperomografie, cioè trasformazioni multilineari.

Le iperomografie saranno oggetto fondamentale del volume *Espaces courbes* che tratteremo nel prossimo capitolo.

[9] Riportiamo l'elenco degli autori in ordine alfabetico enfatizzando che fra questi si trovano anche 14 pubblicazioni di T. Levi-Civita: Berzolari, L.; Boggio, T.; Bottasso, M.; Burali-Forti, C.; Burgatti, P.; Caldonazzo, B.; Cisotti, U.; Colonnetti, G.; Comessati, A.; Crudeli, U.; Daniele, E.; Ferrari, M^{a}.; Garbasso, A.; Gugliemi, A.; Laura, E.; Lazzarino; O.; Levi-Civita, T.; Maggi, G. A.; Marcolongo, R.; Massardi, F.; Mattiolo, G. D.; Oseen, C. W.; Palomby, A.; Pensa, A.; Pieri, M.; Poor, V. C.; Rabnovitch, G.; Ricci, C. L.; Santangelo, G. B.; Scattaglia, M.; Sereni, R.; Sibirani, F.; Signorini, A.; Silla, L.; Terracini, A.; Tedone, O.; Toscano, S. A.; Trevisani, S.; Viglezio, E.; Vivanti, G.; Zappa, R.; Ziwet, A.

[10] Ricordiamo che nel 1929 comparirà una nuova edizione in italiano dell'*Analisi vettoriale generale* che però abbiamo deciso di non prendere in considerazione nel presente lavoro. Cfr. Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Analisi vettoriale generale e applicazioni.* Vol I*: Trasformazioni lineari, seconda edizione*, Bologna, Zanichelli, 1929.

5.7 Appendice: Indice del *Omografie vettoriali*

Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica*, Torino, Petrini, 1909.

Capitolo II - Derivate

Capitolo III - Applicazioni alla Fisica-matematica

5.8 Appendice: Indice del *Analyse vectorielle générale.* I.

Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Analyse vectorielle générale: I, Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

Introduction au Chapitre I
Systèmes et opérateurs linéaires

Chapitre I
Homographies vectorielles

Introduction au Chapitre II
Fonctions, limites, différentielles, dérivées

Chapitre II
Fonctions de points et leurs dérivées

5.9 Appendice: Indice del *Analyse vectorielle générale.* II.

Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, *Analyse vectorielle générale: II, Applications à la mécanique et à la physique*, Pavia, Mattei, 1913.

Chapitre I
Moments d'inertie et quantité de mouvement dans les systèmes solides. Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

Chapitre II
Cinematique et statique des corps déformables. Formules fondamentales de l'equilibre et du mouvement des corps élastiques isotropes.

Chapitre VI
Électrodynamique des corps au repos ou en mouvement.

Capitolo 6

Espaces Courbes. Critique de la Relativité (1924)

6.1 Introduzione

Ci proponiamo in questo capitolo di portare avanti l'esame del volume *Espaces Courbes. Critique de la Relativité* che subito presenteremo. Si tratta di un volume che generalizza il calcolo vettoriale e le omografie vettoriali agli spazi a n dimensioni. Gli autori si propongono anche di fare una critica alla Teoria della Relatività utilizzando un tono spesso spregiativo e sarcastico.

Per fare questo analisi abbiamo considerato quelli che a nostro avviso ci sono sembrati i paragrafi più rappresentativi del libro e li abbiamo discussi in dettaglio. Abbiamo anche analizzato la corrispondenza fra gli autori, T. Boggio e C. Burali-Forti pubblicata nei volumi Per Corrispondenza dei matematici italiani del PR.ST.E.M.

Per quanto riguarda l'analisi dell'*Espaces Courbes* riteniamo particolarmente significativo il capitolo 7 del saggio di Livio Pizzocchero nel volume *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali.*[1]

[1]Cfr. Pizzocchero, Livio, «Geometria differenziale». In: Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo, & Nastasi, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 321-379.

6.2 Descrizione del volume

6.2.1 Introduzione generale

Nel 1924 esce ad opera di Cesare Burali-Forti e Tommaso Boggio il volume *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*[2], destinato a ricevere critiche severe da parte del mondo scientifico nazionale ed internazionale.[3] Quest'opera fa parte del vasto programma che aveva come obbiettivo fondamentale quello di riformulare le diverse parti della Fisica-matematica utilizzando il formalismo del calcolo vettoriale assoluto (senza coordinate) e delle omografie vettoriali. I contributi alla teoria degli spazi curvi e alla geometria differenziale sono di T. Boggio, C. Burali-Forti, P. Burgatti e A. Pensa.[4]

L'*Espaces Courbes* è un libro dall'introduzione fortemente polemica, vi si esprimono dei giudizi spregiativi e sarcastici nei confronti della teoria della Relatività. Gli autori dichiarano che l'obbiettivo principale del libro è quello di portare avanti una critica di questa teoria tralasciando i punti di vista fisico-sperimentale e filosofico e concentrandosi sull'analisi delle relazioni con la Meccanica classica e soprattutto sull'aspetto matematico.

«Il faut mettre bien au claire que la critique rationnelle et,

[2] Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*, Torino, STEN, 1924.

[3] Abbiamo individuato le seguenti recensioni: Cassina, Ugo, «Recensione: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *Il Bollettino di Matematica*, IV (1925), XXXVII-XLIV; Straneo, Paolo, «Considerazioni generali sulle critiche della teoria della relatività», *Il Bollettino di Matematica*, (2) IV (1925), I-XII e Rainich, George Yuri, «Reviews: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *The American Mathematical Monthly*, 33, 10 (1926), 515-517, che discuteremo in seguito.

[4] Burali-Forti, Cesare, «Sugli operatori differenziali omografici», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (2) (1916), 51-59; Burali-Forti, Cesare, «Operatori per le iperomografie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 57 (1921-1922), 285-292; Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 73-76; Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 181-184; Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 58-62; Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 169-174; Boggio, Tommaso, «Sulla geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 54 (1918-1919), 189-200; Pensa, Angelo, «Geometria assoluta dei vettori ed omografie in un S_n euclideo», *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, (2) 52 (1919), 439-453 Pensa, Angelo, «Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo. (Nota I)», *Atti del Reale Istituto Veneto*, LXXIX (1919-1920), 275-292; Pensa, Angelo, «Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo. (Nota II)», *Atti del Reale Istituto Veneto*, LXXIX (1919-1920), 737-761, e Burgatti, Pietro, Boggio, Tommaso & Burali-Forti, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930.

> nous l'espérons, complète de la moderne Mécanique générale de la relativité, est, pour nous, le but principal que nous nous proposons par la publication de ce livre.»[5]

A loro avviso, è necessario considerare la Relatività sotto diversi aspetti che ne determinano il ruolo nei diversi campi scientifici; distinguono fra l'aspetto fisico-sperimentale (Bacone, Galileo, Newton), le relazioni con la Meccanica classica (Newton, Lagrange, Voigt, Lorentz), l'aspetto filosofico che, «étant denué de sens, impressionne, plus que tout autre, la presque totalité du public qui est dépourvu de preparation scientifique»,[6] e l'aspetto matematico. Questa strutturazione serve ad enfatizzare l'interesse degli autori per la parte matematica che sarà quella presa maggiormente in considerazione. Per quanto riguarda la discussione degli aspetti fisico-sperimentale e filosofico, si limiteranno sostanzialmente ad alcune considerazioni esposte nella prefazione.

La discussione delle relazioni con la Meccanica classica si basa in gran parte sul lavoro di Carlo Somigliana (1860-1955), apparso nel *Bollettino UMI* del febbraio 1923.[7] Secondo gli autori, la spiegazione relativista del risultato negativo dell'esperienza di Michelson-Morley è stata dimostrata «tout à fait *illusoire*» da Somigliana. Questo termine viene ripetuto costantemente lungo tutta la prefazione, come se la Relatività costituisse una teoria, che analizzata con accuratezza, conducesse a svelare dei risultati veri soltanto in apparenza. Seguono alcune considerazioni fisiche come il fatto che gli spostamenti delle linee spettrali sono dovuti a un effetto di pressione nell'atmosfera solare e non ad effetti gravitazionali. Burali-Forti e Boggio sono convinti che, se si considerassero i campi dei pianeti, che di solito si trascurano nel campo del Sole, cambierebbe lo spostamento osservato. Basandosi in queste considerazioni si afferma che la Relatività «est un système mécanique en complète contradiction expérimentale avec la Mécanique réelle du monde Physique».[8]

La posizione di Somigliana nei riguardi della teoria della Relatività ha avuto senz'altro un peso fondamentale sull'opinione di Burali-Forti e Boggio, conferendo loro sicurezza nelle proprie asserzioni. Carlo Somigliana, discendente di Alessandro Volta, allievo della Scuola Normale di Pisa ed autorevole professore ordinario dell'Università di Torino, aveva vinto la cattedra di Fisica-matematica nel 1892 a Pavia, e si era poi trasferito a Torino dal 1903 dove era rimasto fino al suo collocamento a riposo nel 1935.[9] Somigliana

---

[5] Cfr. Préface générale, V.

[6] Cfr. Préface générale, V.

[7] Somigliana, Carlo, «Bollettino dell'Unione Matematica Italiana», Anno 2, Num. 1, Febbraio 1923, 20-22. [Citato in Preface, pag. VI.]

[8] Cfr. Préface générale, VII.

[9] Cfr. Barberis, Bruno, «Carlo Somigliana», in Roero, Clara Silvia, (a cura di), *La*

viene di nuovo citato in relazione alla critica alle trasformazioni di Lorentz. Gli autori non vedono di buon occhio le nuove relazioni fra spazio e tempo che queste trasformazioni comportano, così come l'introduzione di un tempo locale. A loro avviso, Somigliana ha dimostrato che le trasformazioni di Lorentz sono anch'esse illusorie, in quanto a una spiegazione relativistica di un fenomeno se ne può sempre associare un'altra, newtoniana, che abbia lo stesso valore, e concludono ancora una volta con Somigliana, che le basi della teoria della Relatività sono molto poco sicure. Che i lavori di Somigliana abbiano una grande importanza per gli autori è dimostrato dal fatto che quello relativo alle trasformazioni di Lorentz[10] è discusso ampiamente a pagina 204 del testo, prima di affrontare nel capitolo V della seconda parte del libro la critica della Relatività. C. Cattani a proposito del contributo di Somigliana osserva:

> «[...] Somigliana –che non era mai stato un fautore dei nuovi principi– pubblica un articolo nel quale crede di poter dimostrare come le trasformazioni di Lorentz si possano inquadrare nell'ordinaria meccanica newtoniana. Partendo dall'equazione della propagazione delle onde, [...] fa vedere come l'equazione è invariante per la più generale trasformazione della soluzione. Caso particolare della trasformazione della soluzione è la trasformazione di Lorentz, [...]. La trasformazione della soluzione, che mantiene inalterata l'equazione, corrisponde al caso di una sorgente di onde che è mobile di moto uniforme.»[11]

Somigliana conclude che tutte le proprietà che nella teoria della Relatività risultano dalla trasformazione lorentziana, sono generalmente suscettibili di una interpretazione di carattere prettamente newtoniano, ma Cattani aggiunge:

> «In realtà, sfuggiva a Somigliana che il fronte d'onda sferico avanza con una velocità che è la velocità della luce e dalle sue considerazioni risulta che la velocità della luce è invariante per la trasfor-

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1898. Tomo secondo. I docenti, Torino, Centro di Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti IX, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999, 511.

[10] Somigliana, Carlo, «Sulla trasformazione di Lorentz», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (1) (1922), 409-414.

[11] Cfr. Cattani, Carlo, «Marcolongo e la volgarizzazione della relatività (1906-1924)», *Rivista di Storia della Scienza*, II, 4,(2) (1996), 99-144, 136.

mazione di coordinate da lui considerata ma questa invarianza è inconciliabile con i postulati della meccanica newtoniana.»[12]

Dal punto di vista filosofico gli autori accusano la teoria della Relatività di essere divenuta «crédo fondamental du public», che si lascia convincere dall'attrazione per l'incomprensibile. Trovano insostenibile l'abolizione di uno spazio assoluto geometrico, fisso e ambiente (con etere o meno), del movimento assoluto, del tempo newtoniano assoluto, così come la mancanza di interpretazione univoca della simultaneità degli eventi. Dichiarano poi, facendo riferimento a due dei loro lavori, che hanno abolito ogni movimento relativo.[13]

Un altro elemento che li turba è dato dall'introduzione dello spazio-tempo o universo, riportiamone alcuni passi: «la fusion du temps avec l'espace (obtenue comment?) en chaque point de l'espace ordinaire (lequel?) engendre l'*espace-temps* ou *universe*».[14] Insistono: «Et c'est précisément cet S_4 (expression exclusivement *analytique* pour bien de physiciens) que, pour une certaine 'quantità di gente' est un *élément physique absolu*, le *crédo* fondamental de la Relativité, et duquel doivent jaillir, comme eau sous la baguette de Moïse, toutes les lois physiques».[15]. Il testo della prefazione è inficiato da citazioni varie di raro contenuto scientifico. Per farne soltanto un esempio:

«Osservo sempre, e, più che penso e scrivo,
Vedo che insiem cogli astri e le stagioni
Tutto gira, né sta fisso un minuto...
Bravo, perdio. Stupende osservazioni!»[16]

Gli autori esprimono la loro convinzione che alle formule ordinarie della Relatività, espresse mediante coordinate, si può facilmente dare una forma assoluta, indipendente cioè da queste. A loro avviso, la riduzione in questa forma, insieme alla considerazione degli spazi curvi ben definiti,[17] rende evidente

[12]Cfr. Cattani, Carlo, «Marcolongo e la volgarizzazione della relatività (1906-1924)», *Rivista di Storia della Scienza*, II, 4,(2) (1996), 99-144, 136.

[13]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, *Meccanica razionale*, Torino, Lattes, 1921 e Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, «Moti relativi e pendolo di Foucault», *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 55 (1922), 310-317

[14]Cfr. Préface générale, IX.

[15]Cfr. Préface générale, IX e X.

[16]Renato Fucini, sonetto XXVI, Meccanica Universale, citato in Préface générale, IX.

[17]Citano i lavori di Boggio sugli spazi curvi: Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 58-62; Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 169-174 e Boggio, Tommaso, «Sulla geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 54 (1918-1919), 189-200.

l'impossibilità fisica dello spazio tempo einsteniano, nonostante le operazioni di alcuni relativisti entusiasti. Aggiungono ancora un altro commento ironico sulla possibilità di percepire la quarta dimensione, con un tatto o una sensibilità (naturalmente relativista!)[18] Per la dimostrazione di tale impossibilità fisica, gli autori rimandano alla Seconda parte del libro[19], dove si trova la dimostrazione matematica completa.

Un'altra delle critiche è mossa al concetto di covarianza. Gli autori affermano che la Relatività considera la covarianza come elemento caratteristico dei fenomeni fisici, *probabilmente*[20] perché la covarianza «conserva il ds^2». Dichiarano di aver scoperto un'altra specie di covarianza, che si è presentata nella riduzione a forma assoluta che, come l'altra, conserva il ds^2. Sostituendo questa covarianza all'altra, si potrebbe dunque, a loro avviso, costruire una nuova meccanica, che getta dei dubbi su quale delle due sia quella vera: «Ni l'une, ni l'autre, probablement, ou, selon nous, certainement». Non è quindi la «covarianza» che può caratterizzare i fenomeni fisici ma l'«invarianza». Osservano che quest'idea è confermata dal fatto che ogni covariante o controvariante, di una qualunque delle otto specie da loro trovate, da un invariante dello spazio curvo C_n [21], e si chiedono perché non è questo invariante a giocare un ruolo fisico-meccanico.[22]

Ci limitiamo, per ora, a questo cenno della critica, che verrà discussa in esteso più avanti prendendo in considerazione i dettagli tecnici necessari. Vogliamo però mettere in risalto che si tratta di un aspetto fondamentale che collega il pensiero degli autori, anche se solo idealmente, alle ricerche matematiche sulla teoria degli invarianti del secolo precedente, che vede in questi, gli «oggetti geometrici», o come per gli autori, gli oggetti che hanno un «vero significato fisico».

Una delle rivendicazioni fondamentali del libro è quella della possibilità di utilizzare il formalismo del calcolo vettoriale assoluto per trattare problemi relativi a spazi di dimensione superiore a tre. Commentano infatti che dall'apparizione dell'S_4 di Minkowski, alcuni fisici-matematici hanno affermato che i metodi vettoriali ed omografici erano insufficienti, opinione a loro avviso falsa, che si è rafforzata dall'apparizione dello spazio tempo einsteniano. Hanno quindi dovuto dimostrare con chiarezza e «d'une manière irréfutable» nel volume, che anche con i vettori e le omografie, si può ottenere in forma assoluta, tutto ciò che i relativisti ottengono con i metodi non assoluti, cioè con l'utilizzazione delle coordinate, qualsiasi esse siano, generali o non. Insistono

[18]Cfr. Préface générale, X.
[19]Cfr. Seconda parte, V, n° 2.
[20]Corsivo nostro.
[21]Cfr. Nota I, 238.
[22]Cfr. Preface, XI.

quindi sul fatto che non soltanto in campo relativistico ma anche in quello *geometrico*, cioè nell'ordinario calcolo differenziale assoluto, hanno eliminato tutti gli elementi dipendenti dalle coordinate: le coordinate stesse, i sistemi multipli con indici sotto e sopra, i loro cambiamenti relativi, la moltiplicazione e la composizione di sistemi, i simboli di Christoffel e di Riemann, la covarianza e la controvarianza, le derivate covarianti e controvarianti, ecc.[23]

Il libro si apre con una prefazione generale e si articola in due parti precedute da due prefazioni molto interessanti nelle quali gli autori dichiarano gli obbiettivi che si sono prefissi nella realizzazione dell'opera e ci consentono di intuire alcuni particolari che riguardano la polemica in atto.

6.2.2 Prefazione alla prima parte

Gli autori dichiarano nella prefazione della prima parte che presenteranno una teoria vettoriale-omografica, completa degli spazi a n dimensioni. Insistono ancora sul fatto che il calcolo vettoriale omografico e assoluto, «c'est à-dire tout à fait indépendant des coordonnées de toute espèce» è stato quasi esclusivamente sviluppato nel campo geometrico ordinario a tre dimensioni in un S_3, con alcune estensioni parziali ad un S_n generico.

Hanno sentito quindi la necessità di elaborare una teoria degli spazi curvi in dimensione arbitraria, spinti dal fatto che diversi autori hanno riconosciuto la necessità di introdurre l'S_4 nelle ricerche fisico-meccaniche e l'S_n generico nelle ricerche geometriche. Affermano che si è tratta la conclusione che il metodo assoluto senza coordinate non può essere utilizzato per risolvere questo tipo di problemi e che è quindi necessario ricorrere al «calcolo differenziale assoluto» con coordinate generali e citano a questo proposito il lavoro di Gregorio Ricci-Curbastro e Tullio Levi-Civita apparso nei *Mathematische Annalen*.[24] Il riferimento è importante dato che non sono molti i lavori citati dagli autori, che non siano in relazione diretta con il loro calcolo assoluto.

Segue una serie di considerazioni sugli S_n

> «Si P est un élément quelconque, fonction de n paramètres indépendantes, alors, si ces paramètres varient dans des intervalles donnés, l'élément P remplit, même plusiers fois, un classe qu'on appelle champ, ou espace, a n dimensions, S_n.»[25]

Fra gli S_n vengono considerati quelli geometrici lineari, o gli S_n contenuti

[23]Cfr. Préface génerale, XII.

[24]Ricci, Gregorio & Levi-Civita, Tullio, «Métodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Mathematische Annalen*, 54 (1901), 125-201.

[25]Cfr. Préface à la première partie, XVIII.

in un S_3 (o in un S_2 come le coniche in un piano), oppure gli S_n dati dalle equazioni del movimento dei sistemi di Lagrange o di Hamilton.

Citano a questo proposito un lavoro di Marcolongo sulle trasformazioni di Lorentz[26] in relazione con la riduzione dell'S_4 a un S_3 più il tempo e di Pensa[27] di critica dei vettori di seconda specie di Minkowski «lesquels, efectivement, ne peuvent être des vecteurs de l'S_4».

Si affaccia ancora il problema di stabilire qual'è lo spazio fisico, che verrà ripreso anche per quanto riguarda la critica della relatività. Questa preoccupazione per l'interpretazione dell'S_4 della Relatività ed il tentativo di comprensione dal punto di vista matematico della sua struttura è ricorrente. Da un lato, come abbiamo detto, si pone la difficoltà della comprensione della struttura geometrica e dall'altro la difficoltà dell'intuizione di questa quarta dimensione. Questi dubbi insieme ai risultati ottenuti da Marcolongo che studiano e generalizzano le trasformazioni di Lorentz[28], separando lo spazio dal tempo, fanno sì che gli autori non vedano la necessità di introdurre una quarta dimensione per quanto riguarda la Fisica-meccanica.

Prenderemo in seguito in considerazione la posizione di Marcolongo in relazione alla relatività ed alla possibilità di trattare questa teoria con il formalismo del calcolo vettoriale assoluto al quale lui stesso ha dato, come abbiamo visto importanti contributi.

Gli autori concludono

> «Il est notre avis, appuyé par des nombreuses considérations, que, dans le sens expérimental, seulement l'S_3 peut être considéré comme *espace physique*; on aura des S_n contenus dans l'S_3, comme nous venons de noter, mais ils n'auront jamais les caractères physiques et géométriques qu'on voudrait attribuer à l'S_4 *espace-temps* ou *univers.*»[29]

Insistono ancora sul concetto esposto prima che questa concezione degli S_n rende totalmente inutile una teoria generale dei vettori e delle omografie in uno spazio a n dimensioni. È sufficiente una teoria applicata all'S_3 per risolvere tutti i problemi di natura fisico-meccanica-geometrica reali. Si sarebbero potuti limitare quindi all'S_3, ma non l'hanno fatto per evitare che

[26]Marcolongo, Roberto, «Les transformations de Lorentz et les équations de l'Électrodynamique», *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, IV (1912), 429-468.

[27]Pensa, Angelo, «Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo. (Nota II)», *Atti del Reale Istituto Veneto*, LXXIX (1919-1920), 737-761. Pagina 759, citata in Préface à la première partie, XIX.

[28]Giannetto, Enrico Antonio, «Le trasformazioni di Lorentz-Poincaré-Marcolongo», *Atti del LXXXV Congresso Nazionale di SIF, Pavia*, in corso di stampa (1999), s.p.

[29]Cfr. Préface à la première partie, XIX.

coloro che giudicano necessari l'S_4 e l'S_n generico possano concludere che «notre *méthode absolu* est *impuissante* pour les espaces a n dimensions», e poiché non possono esigere che «cette verité soit admise *à priori* pour tout le monde» hanno voluto darne una completa dimostrazione.

Abbiamo creduto opportuno riprodurre ancora queste considerazioni ripetitive per trasmettere quella che a nostro avviso è una strategia retorica degli autori che in realtà si riprende in molte parti del testo e che ha probabilmente nociuto[30] alla trasmissione e alla discussione dei contenuti matematici dagli autori introdotti.

Esaminano quindi il contenuto della prima parte:

Nei capitoli I e II si studiano i vettori e le omografie vettoriali nell'S_n geometrico (lineare) secondo quanto fatto per l'S_3. Si passa poi a considerare le iperomografie o omografie du ordine u (H_u) che vengono studiate nel capitolo III e si introducono tutti i simboli necessari all'estensione della nomenclatura vettoriale agli spazi ad n dimensioni, seguiti dal commento che il lettore crederà che i simboli introdotti sono troppo numerosi: ma vedrà nel capitolo IV e nella seconda parte del libro che gli operatori I_1, K, k, k', k^*, v rappresentano un minimo dipendente non dalla volontà degli autori ma dalla natura della questione studiata. Il lettore si convincerà di questo fatto vedendo come il capitolo III sostituisce completamente, (cfr. capitolo V) l'ordinario algoritmo dei sistemi multipli, eliminando le coordinate, le derivate parziali, gli indici in basso ed in alto, il passaggio degli indici dall'alto i basso e viceversa, le relazioni di covarianza, le derivate covarianti, etc.

Si danno nel numero 1 e 2 del capitolo III, le regole fondamentali di derivazione rispetto ad un punto, e si definiscono per l'S_n gli operatori differenziali $grad, div$ già noti per l'S_3. Gli autori osservano che è importante notare che la trasformazione introdotta da P in P' non ha alcuna importanza intrinseca e serve soltanto a paragonare le forme ordinarie con le loro.

Segue un'affermazione importante e cioè che il capitolo V non ha alcuna importanza nello sviluppo algoritmico dei vettori e delle omografie dell'S_n; ha il solo scopo di mostrare, come, dal contenuto del capitolo III si può dedurre tutta l'ordinaria teoria dei sistemi multipli. (Il capitolo III ricordiamo tratta delle omografie di ordine n).

C'è una «correspondance univoque» (n° 1) tra le omografie di ordine u i sistemi multipli di ordine $u + 1$, sempre in relazione ad un sistema di riferimento unitario ortogonale di vettori dell'S_n (cfr. I, n° 6). Secondo gli autori, considerando le omografie, si ha una semplificazione, insieme all'eliminazione delle coordinate. Si introduce la trasformazione σ (cfr. IV, n° 6) generale e assoluta, si da la definizione anch'essa assoluta di omografia invariante,

[30] Si veda più avanti il paragrafo sulle recensioni del volume di Straneo e Rainich.

covariante e controvariante in relazione ad una trasformazione considerata (cfr. n^o 2), e sempre perseguendo quest'idea di eliminazione delle coordinate si considerano (n^o 3, 5, 6) la moltiplicazione e composizione di sistemi, (n^o 4) la somma di sistemi, definiti in modo assoluto, indipendente dalla trasformazione σ e senza supporre a priori la covarianza. Si ottengono altre sei specie (n^o 7) di covarianza e di controvarianza, oltre alle due ordinarie.

Due di queste otto specie conservano il ds^2 (gli elementi lineari) una di queste è l'ordinaria covarianza che si prende come caratteristica dei fenomeni fisico-meccanici.

Si ottiene la reciprocità che risulta indipendente da σ e quindi da tutta covarianza, ma che dipende da α, e se ne ottengono altre sette. Queste otto forme dipendenti da α, sono analoghe alle forme per la covarianza e la controvarianza, (cfr. n^o 9), sempre relativamente alla forma differenziale quadratica $ds^2 = dP \times \alpha dP$ (cfr. IV, n^o 3) e relativamente ad α soltanto, (anche se la σ viene utilizzata all'inizio, sparisce completamente dopo), si introducono (n^o 9) i differenziali e le derivate covarianti e controvarianti (sempre di 8 specie).

Anche se a detta degli autori i simboli di Christoffel e di Riemann non sono né necessari, né utili, ne danno la forma assoluta tramite le omografie λ_2 e λ_3 soltanto con lo scopo di trovarne tutte le proprietà note ed altre ancora. Nel capitolo V, oltre al paragone fra le forme assolute e quelle ordinarie dipendenti dalle coordinate, si ottengono alcuni oggetti assoluti dipendenti da α e σ e che non sono quindi utili per l'algoritmo generale. Lasciando da parte gli sviluppi particolari che si trovano nella seconda parte del libro, indicano alcune caratteristiche delle omografie β, α e σ. Q è uno spazio curvo, lo spazio P ne da una rappresentazione in uno spazio S_n euclideo, e l'omografia α, funzione di β ne da la metrica dello spazio curvo o più esattamente la metrica dello spazio rappresentativo. Ma lo spazio curvo effettivo è quello dei punti Q e non quello dei P, e se anche risulta a volte utile operare nello spazio rappresentativo perché è lineare, spesso si arriva prima i risultati, operando nello spazio effettivo Q (cfr. IV, n^o 7).

Nelle forme ordinarie, si opera sempre nello spazio rappresentativo, e lo spazio effettivo Q si presenta in un modo indiretto.

Nelle questioni fisiche e geometriche relative allo spazio curvo, si ha a volte la necessità di una trasformazione dello spazio Q o P in sé stessi, le trasformazioni utilizzate sono particolari e assolute (cfr. n^o 7). Non bisogna confondere la trasformazione assoluta σ, con gli ordinari cambiamenti di coordinate (le coordinate non esistono nelle forme assolute), dato che mentre σ è un elemento non essenziale, cioè un elemento che può essere considerato o meno, la trasformazione delle coordinate è la base necessaria del calcolo ordinario, nel quale sono degli elementi necessari anche le derivate covarianti e controvarianti (cfr. n^o 7) che non sono affatto considerate nel calcolo assoluto.

Ci sono elementi che vengono introdotti nel volume, per stabilire la relazione fra il formalismo del calcolo assoluto di Burali-Forti e Boggio e quello del calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita, che però non sono necessari.

6.2.3 Omografie generali

Le omografie generali costituiscono uno degli oggetti fondamentali per lo sviluppo delle teoria degli spazi curvi. Gli autori premettono che operano sempre in un S_n euclideo:

> «Nous opérons toujours avec des points, des vecteurs et des opérateurs vectoriels appartenant à un S_n euclidien; et dans les théorems et les formules mêmes où il n'y aura pas d'indications relatives à cet espace et à son ordre n, nous entendrons que ceux-ci soient sous-entendu, non pas supprimés, car tous les éléments que nous allons considérer dépendent de l'S_n.»[31]

Le omografie di ordine u sono una generalizzazione delle omografie ordinarie ed associano un vettore ad una u-pla di vettori.

Dato μ operatore (da sinistra sempre), si dice omografia vettoriale di ordine u, $\mu_u \in H_u$, $u > 0$ ogni operatore tra u-ple di vettori tale che $\mu_u \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \ldots \boldsymbol{x}_u$ sia un *vettore* funzione lineare di ciascuno dei vettori $\boldsymbol{x}_i$. L' indice u esprime l'ordine dell'omografia. Dati $\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_u$, $\boldsymbol{x} = \mu_u \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_u$ esiste ed è unico. Caso particolare sono le H_1, omografie ordinarie. Con H_0 si indicheranno i vettori.

Riproduciamo testualmente la definizione delle omografie di ordine u perché consideriamo si tratti di un punto importante per la discussione successiva

> «Nous appelerons *homographie de l'ordre* u tout court H_u, u étant un nombre entier positif, non nul, tout opérateur μ_u entre u-ples de vecteurs , tel que: $\mu_u \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \ldots \boldsymbol{x}_u$ soit un vecteur fonction linéaire de chacun des vecteurs $\boldsymbol{x}$.»[32]

Due omografie generali sono uguali quando è uguale il risultato di applicarle ad un insieme di u vettori, per qualunque u-pla di vettori.

Si possono definire la somma di omografie e il prodotto di una omografia per uno scalare:

$$(\mu_u + \mu'_u) \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_u = \mu_u \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_u + \mu'_u \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_u$$

[31] Cfr. Première partie, III, n° 1, 24.

[32] Ibidem nota precedente.

$$(m\mu_u)\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_u = m(\mu_u \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_u)$$

Da queste definizioni e dal fatto che esiste l'omografia nulla rispetto alla somma ed al prodotto segue che le omografie generali formano un sistema lineare[33]. Si dimostra che tale sistema ha al massimo n^{u+1} dimensioni.

Se μ_u si applica ad un numero $r < u$ di vettori allora l'oggetto $\mu_u \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_r$ è una omografia di ordine $u - r$.

Dati $u \geq 2$ ed r intero, $r < u$, l'oggetto $\mu_u \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_r$ è una omografia di ordine $u-r$, si può cioè applicare a $\boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{u-r}$ vettori ottenendo un vettore nel modo seguente

$$(\mu_u \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \dots \boldsymbol{x}_r)\boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{u-r} = \mu_u \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \dots \boldsymbol{x}_r \boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{u-r}$$

Date $\mu_u, \mu_v \in H_u, H_v$ rispettivamente, ($u \neq 0, v \neq 0$, le μ non sono vettori), si definisce il prodotto delle omografie μ_u e μ_v, $\mu_u \circ \mu_v$ appartenente alle H_{u+v-1} nel modo seguente:

$$(\mu_u \circ \mu_v)\ \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_v\ \boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{u-1} \equiv \mu_u . \mu_v \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_v . \boldsymbol{y}_1 \dots \boldsymbol{y}_{u-1}$$

(Il prodotto è distributivo rispetto alla somma ma in generale non è commutativo).

6.2.4 Operatori per le iperomografie

Per sviluppare la teoria degli spazi curvi e operare la traduzione al linguaggio senza coordinate di tutti gli oggetti del calcolo assoluto con coordinate diventa necessaria la definizione di alcuni operatori tra omografie. Daremo quindi alcune definizioni di operatori non differenziali necessarie per quanto seguirà.

L'operatore binario $\mathscr{H}_r$ si definisce per $u \geq 2$, $r > u$ e per qualunque $\boldsymbol{x}_i$ vettore come segue

$$\mathscr{H}_r(\mu_u, \mu_v)(\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_r) = \mu_u\ \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_r . \mu_v$$

$\mathscr{H}_r(\mu_u, \mu_v) \in H_{u+v-1}$ e per $r = 0$ coincide con il prodotto di omografie, $\mathscr{H}_0(\mu_u, \mu_v) = \mu_u \mu_v$.

Si può dare agli operatori I_1, K, D, A, C già definiti per le H_1 un campo più vasto di applicabilità in modo da diventare operatori tra le H_u. Si ha infatti per $u \geq 2$ e $f = I_1, K, D, A, C$

$$(f\mu_u)\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_{u-1} = f(\mu_u \boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_{u-1})$$

[33] I sistemi lineari gli spazio vettoriali. Cfr. Peano, Giuseppe, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*, Torino, Bocca, 1888.

Dato che $\mu_u \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-1} \in H_1$ allora $f\mu_u \in H_u$, funzione determinata di μ_u e quindi i simboli I_1, K, D, A, C sono operatori lineari tra H_u.

Definiamo ora per le H_u, $u \geq 2$ gli operatori k, k^*,

$$(k\mu_u)\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-2}\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2 = \mu_u \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-2}\boldsymbol{y}_2\boldsymbol{y}_1$$

$$(k^*\mu_u)\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 = \mu_u \boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1$$

in generale $k\mu_u$ e $k^*\mu_u$ applicati a una sucessione di u vettori danno gli stessi vettori che si ottengono applicando μ_u alla sucessione ottenuta da quella di partenza cambiando l'ordine rispettivamente degli ultimi e dei primi due vettori.

Definiamo adesso l'operatore k', dipendente dal prodotto interno, per $u \geq 2$, e $\boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ vettori qualunque, come segue,

$$\boldsymbol{x} \times (k'\mu_u)\boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_{u-2}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \times \mu_u \boldsymbol{z}_1 \ldots \boldsymbol{z}_{u-2}\boldsymbol{x}$$

Questi operatori vengono poi generalizzati con gli operatori k a più indici.

L'operatore Φ sarà particolarmente importante per quel che riguarda la definizione di invarianti, covarianti e controvarianti.

Date $\alpha_i \in H_1, i = 1 \ldots v, v > 0, \mu_u \in H_u$ si può definire l'operatore tra omografie $\mathscr{H}$ per la $(v+1)$-pla $(\mu_u, \alpha_1 \ldots \alpha_v)$ come

$$\mathscr{H}(\mu_u, \alpha_1 \ldots \alpha_v)\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-v}\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_v = \mu_u\, \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-v}.\alpha_1\boldsymbol{y}_1 \ldots \alpha_v\boldsymbol{y}_v,\ u > v > 0$$

Nel caso che le v H_1 coincidano si ha

$$\mathscr{H}(\mu_u, \alpha^v)\boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-v}\boldsymbol{y}_1 \ldots \boldsymbol{y}_v = \mu_u\ \boldsymbol{x}_1 \ldots \boldsymbol{x}_{u-v}.\alpha\boldsymbol{y}_1 \ldots \alpha\boldsymbol{y}_v,\ u > v > 0$$

Definiamo ora l'operatore Φ che ci permette di esprimere in modo più sintetico l'operatore tra omografie $\mathscr{H}$ per il caso particolare $\mathscr{H}(\alpha\mu_u\beta, \gamma^{u-1})$, cioè

$$\begin{cases} \Phi_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_u & = \mathscr{H}(\alpha\mu_u\beta, \gamma^{u-1}),\ \ u > 0 \\ \Phi_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_0 & = \alpha\mu_0 \end{cases}$$

$\Phi_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_u$ è una H_u univocamente determinata e funzione lineare delle $\mu_u, \alpha, \beta, \gamma$. Alcune proprietà importanti delle Φ sono,

$$\Phi_{\alpha,\beta,\gamma}\Phi_{\xi,\eta,\zeta} = \Phi_{\alpha\xi,\beta\eta,\zeta\gamma}$$

$$\Phi^{-1}_{\alpha,\beta,\gamma} = \Phi_{\alpha^{-1},\beta^{-1},\gamma^{-1}}$$

6.2.5 Operatori differenziali

Riassumiamo in questa sezione alcune proprietà differenziali così come le omografie che mettono in relazione gli spazi euclidei con quelli non euclidei.

6.2.6 Trasformazioni tra spazi euclidei e non euclidei

Analizziamo innanzi tutto le trasformazioni di un S_n anche non euclideo in un S_n euclideo. Sia Q un punto generico di un S_n anche non euclideo che chiameremo «spazio Q», $n \geq 2$. Quando questo spazio sarà non euclideo lo considereremo contenuto in un $S_{n'}$ euclideo, $n' \geq n$, nel quale si faranno i calcoli relativi ai punti e ai vettori dello «spazio Q» con i metodi ordinari. Sia P un punto di uno spazio S_n euclideo che chiameremo «spazio P», nel quale faremo la supposizione che siano commutabili i simboli che indicano uno spostamento infinitamente piccolo dal punto P. Infine fisseremo una corrispondenza biunivoca (univoca e reciproca) tra gli spazi Q e P in modo che il punto $Q + dQ$ (che appartiene all'$S_{n'}$) appartenga allo spazio Q e che come dQ è il corrispondente di dP, cosí $Q+dQ$ sia il corrispondente di $P+dP$.

Sia β l'omografia che trasforma dP in dQ cioè

$$\beta = \frac{dQ}{dP}\ , \qquad\qquad \beta^{-1} = \frac{dP}{dQ}$$

È importante stabilire il campo di applicabilità di $\beta, \beta^{-1}, K\beta, K\beta^{-1}$, β e $K\beta^{-1}$ trasformano elementi di P in elementi di Q, β^{-1} e $K\beta$ trasformano elementi di Q in elementi di P. Analogamente per tutti i prodotti possibili di questi operatori, ad esempio $\beta^{-1}\beta$ trasforma elementi di P in elementi di P, mentre $\beta\beta^{-1}$ trasforma elementi di Q in elementi di Q.

Se si verifica come premesso che sono commutabili gli spostamenti infinitamente piccoli dal punto P cioè $d\delta P = \delta dP$ si ha

$$\delta d\beta - d\delta\beta = (k^* - 1)\frac{d^2\beta}{dP^2}\ dP\delta P$$

È necessario introdurre l'omografia α come segue $\alpha = K\beta.\beta$ oppure anche $\alpha^{-1} = \beta^{-1}.K\beta^{-1}$ da cui $K\alpha = \alpha$ e $K\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$ per cui α e α^{-1} sono dilatazioni.

L'omografia α esprime l'*elemento di linea ds* dello spazio Q in funzione di elementi di P o più precisamente

$$ds^2 = dQ \times dQ = \beta dP \times \beta dP = dP \times K\beta.\beta dP = dP \times \alpha dP$$

Gli autori introducono allora l'operatore λ_m, che avrà grande importanza per la traduzione dei simboli di Christoffel e di Riemann:[34]

$$\lambda_m = \beta^{-1}\frac{d^{m-1}\beta}{dP^{m-1}}\ , \qquad\qquad m \geq 2$$

[34]In particolare λ_2 darà luogo ai simboli di Christoffel e λ_3, a quelli di Riemann.

λ_m è un'omografia di ordine m e si verifica la proprietà $k\lambda_m = \lambda_m$. Si verificano inoltre le seguenti proprietà per la derivata rispetto al punto delle omografie λ_m e $\alpha\lambda_m$

$$\frac{d\lambda_m}{dP} = \lambda_{m+1} - \mathscr{H}_1(\lambda_2, \lambda_m)$$

In particolare per $m = 2$ si ha

$$\frac{d\lambda_2}{dP} = \lambda_3 - k^* k(\lambda_2 \lambda_2)$$

$$\frac{d\alpha\lambda_m}{dP} = \alpha\lambda_{m+1} - \mathscr{H}_1(K\lambda_2, \alpha\lambda_m)$$

Un'altra espressione notevole per l'omografia λ_2 in funzione di α e della sua derivata[35] è la seguente

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\, \alpha^{-1}.(1 + k - k')\, \frac{d\alpha}{dP}$$

Prendiamo adesso in considerazione le trasformazioni dell'S_n euclideo in se stesso e definiamo le omografie σ, β', α', e l'operatore e λ'_m.

Trasformiamo l'S_n euclideo dei punti P in se stesso tramite una trasformazione univoca e reciproca (biunivoca) continua. σ è l'omografia reversibile che trasforma i dP' in dP[36] cioè

$$\sigma = \frac{dP}{dP'}\,, \qquad\qquad \sigma^{-1} = \frac{dP'}{dP}$$

Il campo di applicabilità dell'omografia è tale che σ e $k\sigma^{-1}$ trasformano vettori di P' in vettori di P mentre σ^{-1} e $k\sigma$ vettori di P in vettori di P', analogamente per i prodotti di queste omografie, $\sigma^{-1}\sigma$ per esempio trasforma elementi di P' in elementi di P'.

Dalla composizione della trasformazione suddetta tra i punti di P' e P e la trasformazione conosciuta tra Q e P si ottiene una trasformazione tra Q e P' che alle omografie β e α fa corrispondere le β' e α' per cui si ha

$$\beta' = \frac{dQ}{dP'} \qquad\qquad \alpha' = k\beta'.\beta'$$

Si verificano le seguenti importanti relazioni tra le omografie σ, β, β', α, α'

[35]Espressione dei simboli di Christoffel in funzione delle derivate della metrica.

[36]Omografia che permetterà di definire ciò che gli autori chiamano il covariante, il contravariante, ecc. Analogo «assoluto» del cambiamento di base.

$$\begin{cases} \beta' = \beta\sigma \ , & \beta = \beta'\sigma^{-1} \\ \alpha' = k\sigma.\alpha.\sigma, & \alpha = k\sigma^{-1}.\alpha'.\sigma^{-1} \\ ds^2 = dQ \times dQ = dP \times \alpha dP = dP' \times \alpha' dP' \end{cases}$$

Si ottiene anche l'operatore λ'_m che corrisponde all'operatore λ_m cioè

$$\lambda'_m = \beta'^{-1} \frac{d^{m-1}\beta'}{dP'^{m-1}}, \qquad m \geq 2$$

Trascriviamo adesso alcune formule fondamentali per gli spazi Q, P e P'. Considereremo in seguito che essendo d, $\delta \ldots$ dei differenziali arbitrari si verifica che $d\delta P = \delta dP$, $d\delta P' = \delta dP'$, ecc. Le formule di questo paragrafo tranne l'ultima sono state ottenute da T. Boggio nel 1919. Vengono qui trascritte con le notazioni presentate nell'*Espaces Courbes*.

Se si verifica la condizione suddetta per gli spostamenti infinitesimali dal punto P si verifica anche che

$$d\delta Q = \delta dQ$$

$$(k^* - 1)\lambda_3 ab = \frac{d\lambda_2 a}{dP} b - \frac{d\lambda_2 b}{dP} a + \lambda_2 b.\lambda_2 a - \lambda_2 a.\lambda_2 b$$

$$b \times (k^* - 1)\lambda_3 cba = d \times (k^* - 1)\lambda_3 abc$$

$$\begin{cases} I_1(k^* - 1)\alpha^m \lambda_3 = 0 \\ m, \text{intero}, \text{relativo}, \text{arbitrario} \end{cases}$$

Dalle espressioni di $d\sigma$ si ottengono le seguenti relazioni che esprimono la relazione tra λ e λ'

$$\begin{cases} \lambda'_2 = \sigma^{-1} \left\{ \dfrac{d\sigma}{dP} + k(\lambda_2\sigma) \right\} \sigma \ , \\ \lambda_2 = \sigma \left\{ \dfrac{d\sigma^{-1}}{dP} + k(\lambda'_2\sigma^{-1}) \right\} \sigma^{-1} \end{cases}$$

Le espressioni effettive per λ_3 e λ'_3 sono invece

$$\begin{cases} (k^* - 1)\lambda'_3 = \Phi_{\sigma^{-1},\sigma,\sigma}\{(k^* - 1)\lambda_3\} \\ (k^* - 1)\lambda_3 = \Phi_{\sigma,\sigma^{-1},\sigma^{-1}}\{(k^* - 1)\lambda'_3\} \end{cases}$$

Si ottiene anche

$$\Phi_{\sigma,\sigma^{-1},\sigma^{-1}}\{(k^* - 1)\alpha\lambda_3\} = (k^* - 1)\alpha'\lambda'_3$$

Si può anche dimostrare che[37]

$$\Phi_{K\sigma,\sigma,\sigma}\{v(k^* - 1)\lambda_3\} = v(k^* - 1)\lambda'_3$$

Riportiamo la dimostrazione completa dell'analogo «assoluto» della covarianza del tensore di Ricci, per rendere esplicito la complicazione inerente al formalismo necessario a tradurre in linguaggio senza coordinate gli enti del Calcolo differenziale assoluto[38]:

III, n° 10, (3)

$$\Phi_{\alpha,\beta,\gamma}\mu_1 = \alpha\mu_1\beta$$

III, n° 8, (7)

$$v(\mu_1\mu_v) = \mu_1.v\mu_v, v \geq 2$$

III, n° 8, (9)

$$v(\mu_u.\mu_v) = v\mu_u.\mu_v, u \geq 3, v \geq 0$$

Da cui

$$\Phi_{K\sigma,\sigma,\sigma}\{v(k^* - 1)\lambda_3\} = K\sigma.vK(k^* - 1)\lambda_3\sigma = v\{K\sigma.K(k^* - 1)\lambda_3\sigma\}$$

Per la seconda delle IV n° 8, (2) (e non la (3))

$$(k^* - 1)\lambda_3 = \sigma.\mathscr{H}\{(k^* - 1)\lambda'_3, \sigma^{-1(2)}\}\sigma^{-1}$$

$$K(k^* - 1)\lambda_3 = K(\sigma.\mathscr{H}\{(k^* - 1)\lambda'_3, \sigma^{-1(2)}\}\sigma^{-1})$$

III n° 9 (5)

$$\mu_w.\mathscr{H}(\mu_u, \alpha_1, \dots \alpha_v)\mu_p = \mathscr{H}(\mu_w\mu_u\mu_p, \alpha_1, \dots \alpha_v), \mu + w > 1$$

da cui

$$K(k^* - 1)\lambda_3 = K[\mathscr{H}\{\sigma(k^* - 1)\lambda'_3, \sigma^{-1}, \sigma^{-1(2)}\}]$$

III n° 9 (11)

$$K\mathscr{H}(\mu_u, \alpha_1, \dots \alpha_v) = \mathscr{H}[K\alpha_v.K\mu_u, \alpha_1, \dots \alpha_{v-1}, 1]$$

$$= \mathscr{H}[K\sigma^{-1}.K\{\sigma(k^* - 1)\lambda'_3\sigma^{-1}, \sigma^{-1}, 1]$$

[37] L'espressione seguente esprime il fatto che l'analogo del tensore di Ricci, che si ottiene in forma assoluta calcolando il vettore dell'omografia dell'analogo del Riemann di 2ª specie è un covariante. Gli autori aggiungeranno, di prima specie soltanto, e useranno l'argomento come critica alla relatività.

[38] La numerazione delle formule corrisponde a quella dell'*Espaces Courbes*

da cui

$$K\sigma.K(k^*-1)\lambda_3'\sigma = \mathscr{H}[K\sigma.K\sigma^{-1}K\{\sigma(k^*-1)\lambda_3'\sigma^{-1}\}\sigma, \sigma^{-1}, 1]$$

$$= \mathscr{H}[K\{\sigma(k^*-1)\lambda_3'\sigma^{-1}\}\sigma, \sigma^{-1}, 1]$$

III n° 7 (3) (e non III n° 8 (3))

$$K(\lambda_1, \lambda_v) = \mathscr{H}_{v-2}(k\lambda_v, K\lambda_1), v > 2$$

$$= \mathscr{H}\{\mathscr{H}_2[K(k^*-1)\lambda_3'.\sigma^{-1}, K\sigma]\sigma, \sigma^{-1}, 1\}$$

III n° 4 (5)

$$\mu_w.\mathscr{H}_r(\mu_u, \mu_v).\mu_h = \mathscr{H}_{r+h-1}(\mu_w\mu_u\mu_h, \mu_v)$$

da cui

$$= \mathscr{H}[\mathscr{H}_2[K(k^*-1)\lambda_3', K\sigma)\sigma^{-1}\sigma, \sigma^{-1}, 1]$$

$$= \mathscr{H}[\mathscr{H}_2[K(k^*-1)\lambda_3', K\sigma), \sigma^{-1}, 1]$$

III n° 9 (10)

$$\mathscr{H}\{\mathscr{H}_{\mu_1}(\mu_u, \alpha_0), \alpha_1 \ldots \alpha_v\} = \mathscr{H}(\mu_u, \alpha_1 \ldots, \alpha v_1, \alpha_0\alpha_v)$$

$$= \mathscr{H}[K(k^*-1)\lambda_3', \sigma^{-1}, K\sigma]$$

da cui

$$\Phi_{K\sigma,\sigma,\sigma}\{vK(k^*-1)\lambda_3\} = v\mathscr{H}\{K(k^*-1)\lambda_3', \sigma^{-1}, K\sigma\}$$

III n° 9 (12), con α omografia reversibile

$$v\mathscr{H}(\mu_3, \alpha^{-1}, K\alpha) = v\mu_3$$

da cui

$$\Phi_{K\sigma,\sigma,\sigma}\{vK(k^*-1)\lambda_3\} = vK(k^*-1)\lambda_3'$$

6.2.7 Calcolo differenziale assoluto

Come abbiamo detto, fra i pochi riferimenti bibliografici che compaiono nell'*Espaces Courbes* si trova il lavoro di G. Ricci Curbastro e T. Levi-Civita pubblicato nei *Mathematische Annalen* nel 1901.[39]

Riprendiamo alcune formule da questo lavoro, dal quale gli autori prendono spunto per la loro traduzione al formalismo assoluto senza coordinate.

[39] Ricci, Gregorio & Levi-Civita, Tullio, «Métodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Mathematische Annalen*, 54 (1901), 125-201.

Si dice che un sistema di funzioni di n variabili $x_1 \dots x_n$ è m^{uplo} o di ordine m se si ha un elemento determinato del sistema per ogni disposizione con ripetizione m a m degli indice $1, 2, \dots, n$.

Diremo allora che un sistema di ordine m è covariante (e in questo caso indicheremo i suoi elementi con i simboli $x_{r_1 r_2 \dots r_m}$) se gli elementi $Y_{r_1 r_2 \dots r_m}$ del sistema trasformato vengono dati dalle formule

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1 \dots s_m} X_{s_1 s_2 \dots s_m} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \frac{\partial x_{r_2}}{\partial y_{s_2}} \cdots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial y_{s_m}}$$

Indicheremo al contrario con i simboli $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ gli elementi di un sistema controvariante, di un sistema cioè la trasformazione del quale viene data dalle formule

$$Y^{(r_1 r_2 \dots r_m)} = \sum_{s_1 \dots s_m} X^{(s_1 s_2 \dots s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}}$$

Definiamo adesso la somma, moltiplicazione, composizione di sistemi; la quadrica o forma fondamentale e i sistemi reciproci.

Somma - Se $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ e $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$ sono due sistemi covarianti dello stesso ordine m,

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \dots r_m}$$

è un sistema covariante di ordine m. Diremo che è la somma dei due sistemi considerati. (Lo stesso vale per i sistemi controvarianti).

Prodotto - Se $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ e $\Xi_{r_1 r_2 \dots r_p}$ sono due sistemi covarianti rispettivamente di ordine m e p,

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p} = X_{r_1 r_2 \dots r_m} \cdot \Xi_{r_1 r_2 \dots r_p}$$

è un sistema covariante di ordine $m + p$. Diremo che è il prodotto dei due sistemi. (Lo stesso vale per i sistemi controvarianti).

Composizione - Se $X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}$ è un sistema covariante qualunque di ordine $m + p$ e $\Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)}$ è un sistema controvariante di ordine p, il sistema di ordine m

$$Y_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_{s_1 \dots s_m} \Xi^{(s_1 s_2 \dots s_p)} X_{r_1 r_2 \dots r_m s_1 s_2 \dots s_p}$$

è un sistema covariante di ordine m. Diremo che è la composizione dei due sistemi. (Analogamente cambiando covarianza per controvarianza).
La composizione di due sistemi di nature opposte e dello stesso ordine dà un

sistema di ordine 0, o invariante.

Quadrica o forma fondamentale - I metodi di calcolo differenziale assoluto riposano essenzialmente sulla considerazione di una forma quadratica positiva nei differenziali delle n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$; cioè su un'espressione del tipo

$$\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$$

Sistemi reciproci - Se si indicano con $a^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca di φ, si hanno le identità

$$a^{(rs)} = \sum_{pq} a^{(rp)} a^{(sq)} a_{pq}$$

In generale dato un sistema covariante di ordine m, $x_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ si ottiene con l'aiuto della forma fondamentale un sistema controvariante dello stesso ordine dato da

$$X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)} = \sum_{s_1 \ldots s_m} a^{(r_1 s_1)} a^{(r_2 s_2)} \ldots a^{(r_m s_m)} X_{s_1 s_2 \ldots s_m}$$

La derivata covariante secondo la forma fondamentale φ di un sistema di ordine m è il sistema covariante di ordine $m+1$ dato da

$$X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial x_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{\partial x_{m+1}} - \sum_l \sum_q \left\{ \begin{matrix} r_l \; r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} X_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m}$$

Per i sistemi controvarianti si definisce la derivata controvariante come segue

$$X^{(r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1})} = \sum_t a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \ldots r_m)}}{\partial x_t} - \sum_l \sum_q \left\{ \begin{matrix} t \; q \\ r_l \end{matrix} \right\} X^{(r_1 r_2 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m)} \right\}$$

Dalla quadrica fondamentale $\varphi = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$ si ottengono le formule dei simboli di Christoffel di primo tipo e del detto sistema covariante di Riemann

$$2a_{rs,t} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}$$

$$a_{rs,tu} = \frac{\partial a_{rt,s}}{\partial x_u} - \frac{\partial a_{ru,s}}{\partial x_t} + \sum_{pq} a^{(pq)} (a_{ru,p} a_{st,q} - a_{rt,p} a_{su,q})$$

Al carattere invariante delle equazioni nel calcolo differenziale assoluto, Ricci e Levi-Civita dedicano il paragrafo 7 dell'articolo prima citato. Ci sembra importante la discussione, per cui ne riportiamo alcuni passi.

> «Les équations (6) qui définissent la loi de transformation des systèmes covariants, nous disent qu'un système covariant quelconte est, ou n'est pas, identiquement nul, indépendamment du choix des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. C'est bien cette propriété que l'on traduit, en disant qu'un système d'equations tel que
>
> $$X_{r_1 r_2 \ldots r_m} = 0,$$
>
> a un caractère invariantif ou absolu. [...]
>
> Lorsqu'on se pose *ex novo* un certain problème, il suffit de supposer ses éléments déterminatifs exprimés en variables tout à fait générales, et de substituer la dérivation covariante (selon une formule fondamentale presque toujours indiquée, par la nature de la question) à la dérivation ordinaire, pour que les équations du problème se présentent sans aucun effort sous forme invariantive.»[40]

Secondo Ricci-Curbastro e Levi-Civita questo è il cammino che bisogna seguire quando si tratta con teorie generali e quando la finalità è un'esposizione sistematica di queste teorie. Anche se il metodo non è applicabile in tutti i casi, si giunge spesso all'obbiettivo in modo semplice e veloce in particolare per le equazioni della Fisica-matematica.

6.2.8 Eliminazione delle coordinate

Procediamo adesso ad analizzare il capitolo V della Prima parte del libro nel quale gli autori effettuano la traduzione degli oggetti del Calcolo differenziale assoluto[41] al calcolo assoluto senza coordinate.

Per Boggio e Burali-Forti i sistemi multipli, oggetto fondamentale del calcolo differenziale assoluto di Ricci-Curbastro e Levi-Civita, sono sistemi di numeri, funzione delle variabili indipendenti $x_1, \ldots, x_n$, coordinate generalizzate (curve oppure no) di uno spazio di dimensione n, S_n. I numeri presi in considerazione rappresentano gli elementi geometrici dell'S_n e sono sempre

[40]Cfr. Ricci, Gregorio & Levi-Civita, Tullio, «Métodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Mathematische Annalen*, 54 (1901), 125-201, 143-144.

[41]che abbiamo riassunto nella sezione precedente.

dipendenti dal sistema di coordinate prescelto. Le proprietà di questi elementi invece possono essere indipendenti dal sistema di coordinate e allora si hanno gli invarianti rispetto ad una trasformazione di coordinate qualunque oppure avere una dipendenza particolare dalla trasformazione considerata e allora si ha la covarianza o la controvarianza.

Scopo di questo capitolo è l'eliminazione delle coordinate; gli autori cercheranno quindi di dimostrare come sia possibile riformulare il calcolo differenziale assoluti senza l'utilizzazione delle coordinate. Parte importante della loro costruzione si baserà sulla corrispondenza fra omografie di ordine u e sistemi multipli di ordine $u+1$.

Livio Pizzocchero afferma che uno dei contributi fondamentali degli autori è quello di avere fornito «la definizone sintetica dei tensori come applicazioni multilineari.»[42] Bisogna però tener conto del fatto che gli autori lavorano sempre in un S_n euclideo.

Data una base ortonormale di vettori in un S_n euclideo, esiste una corrispondenza univoca fra le omografie vettoriali di ordine u e i sistemi multipli di ordine $u+1$. Il sistema multiplo si ottiene applicando l'omografia generale a u vettori della base $\boldsymbol{i}_2, \ldots, \boldsymbol{i}_{u+1}$ e proiettandone il risultato su di un altro vettore prescelto. Considerando cioè gli oggetti del tipo: $\boldsymbol{i}_1 \times \mu_u \boldsymbol{i}_2 \ldots \boldsymbol{i}_{u+1}$, dove $\times$ indica l'ordinario prodotto scalare.

Concettualmente si passa quindi dai sistemi multipli (applicazioni multilineari a valori scalari) alle omografie vettoriali generali (applicazioni multilineari a valori vettoriali). I sistemi multipli risultano così ottenuti in forma assoluta senza l'utilizzazione di alcun sistema di coordinate per i punti P dell'S_n. Gli autori chiameranno in seguito *sistema* μ_u gli ordinari sistemi multipli di ordine $u+1$.

Si passa poi a definire i concetti di invarianza, covarianza e controvarianza.

Data una $\mu_u \in H_u$ omografia di ordine u, è sempre possibile scrivere la nella forma $\mu_u = \theta_p \mu$, dove μ è un elemento funzione di P (punto, vettore, omografia ecc.), θ è un operatore anche non lineare indipendente da P. $\theta_p \mu$ non è altro che l'operatore θ applicato all'elemento μ calcolato nel punto P.

$$\theta_p \mu \equiv \theta \mu|_p$$

Esempi di questo operatore sono $\dfrac{d}{dP}, grad_p, div_p$.

Diremo allora che il sistema $\mu_u = \theta_p \mu$ è invariante, covariante o contro-

[42]Cfr. Pizzocchero, Livio, «Geometria differenziale». In: Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo, & Nastasi, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 321-379, 350.

variante rispettivamente se

$$\theta_{p'}\mu = \theta_p\mu$$

$$\theta_{p'}\mu = \Phi_{k\sigma,\sigma,\sigma}(\theta_p\mu)$$

$$\theta_{p'}\mu = \Phi_{\sigma^{-1},k\sigma^{-1},k\sigma^{-1}}(\theta_p\mu)$$

Se $\sigma : dP' \to dP$ allora $\Phi_{k\sigma,\sigma,\sigma}\mu_u$ è il covariante di μ_u rispetto a σ e $\Phi_{\sigma^{-1},k\sigma^{-1},k\sigma^{-1}}\theta_p\mu_u$ è il controvariante di μ_u rispetto a σ.
Esistono comunque altri sei sistemi ottenuti da μ_u con leggi analoghe.

Combinando quindi adeguatamente questi quattro tipi di omografie σ, $k\sigma\,\sigma^{-1}$ e $k\sigma^{-1}$ è possibile ottenere otto tipi di covarianza e controvarianza come segue:

$$\begin{cases} \Phi_{\sigma,(1)} = \Phi_{k\sigma,\sigma,\sigma} & \Phi_{\sigma,(2)} = \Phi_{k\sigma,\sigma,k\sigma^{-1}} \\ \Phi_{\sigma,(3)} = \Phi_{k\sigma,k\sigma^{-1},k\sigma^{-1}} & \Phi_{\sigma,(4)} = \Phi_{k\sigma,k\sigma^{-1},\sigma} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi_{\sigma}^{(1)} = \Phi_{\sigma^{-1},k\sigma^{-1},k\sigma^{-1}} & \Phi_{\sigma}^{(2)} = \Phi_{\sigma^{-1},k\sigma^{-1},\sigma} \\ \Phi_{\sigma}^{(3)} = \Phi_{\sigma^{-1},\sigma,\sigma} & \Phi_{\sigma}^{(4)} = \Phi_{\sigma^{-1},\sigma,k\sigma^{-1}} \end{cases}$$

Gli autori dimostrano che le ordinarie covarianza e controvarianza sono quelle indicate con $\Phi_{\sigma,(1)}$ e $\Phi_{\sigma}^{(1)}$. Per chiarire questo aspetto è necessario capire qual'è la relazione tra le trasformazioni generali di coordinate e l'omografia σ che passa da punto a punto. Dati due punti P e P' che si scrivono in coordinate come segue: $P = 0 + x_1\boldsymbol{i}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{i}_n$ e $P' = 0 + y_1\boldsymbol{i}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{i}_n$, le derivate delle funzioni coordinate di un punto rispetto all'altro sono le proiezioni sui vettori base dell'omografia.

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_r} = \boldsymbol{i}_i \times \sigma\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{i}_r \times K\sigma\boldsymbol{i}_i, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial x_r} = \boldsymbol{i}_i \times \sigma^{-1}\boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{i}_r \times K\sigma^{-1}\boldsymbol{i}_i$$

Vediamo come si ottiene la prima di queste uguaglianze:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_r} = \frac{\partial(P-O)\times\boldsymbol{i}_i}{\partial y_r} = \frac{\partial P}{\partial y_r}\times\boldsymbol{i}_i = \frac{\partial P}{\partial P'}\frac{\partial P'}{\partial y_r}\times\boldsymbol{i}_i = \sigma\boldsymbol{i}_r\times\boldsymbol{i}_i.$$

Partendo dalla definizione ordinaria di covarianza si ottiene il sistema multiplo associato all'oggetto $\Phi_{\sigma,(1)}\mu_u$ cioè

$$\sum_{s_1\ldots s_u}\boldsymbol{i}_{s_1}\times\mu_{u-1}\boldsymbol{i}_{s_2}\ldots\boldsymbol{i}_{s_u}\frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}}\cdots\frac{\partial x_{s_u}}{\partial y_{r_u}} =$$

$$\sum_{s_1\ldots s_u}\boldsymbol{i}_{s_1}\times\mu_{u-1}\boldsymbol{i}_{s_2}\ldots\boldsymbol{i}_{s_u}.(\boldsymbol{i}_{s_1}\times\sigma\boldsymbol{i}_{r_1})\ldots(\boldsymbol{i}_{s_u}\times\sigma\boldsymbol{i}_{r_u}) =$$

$$= \sum_{s_2\ldots s_u}\sigma\boldsymbol{i}_{r_1}\times\mu_{u-1}\boldsymbol{i}_{s_2}\ldots\boldsymbol{i}_{s_u}.(\boldsymbol{i}_{s_2}\times\sigma\boldsymbol{i}_{r_2})\ldots(\boldsymbol{i}_{s_u}\times\sigma\boldsymbol{i}_{r_u}) =$$

$$\sum_{s_3 \dots s_u} \boldsymbol{i}_{r_1} \times K\sigma.\mu_{u-1}.\sigma\boldsymbol{i}_{r_2}.\boldsymbol{i}_{s_3} \dots \boldsymbol{i}_{s_u}.(\boldsymbol{i}_{s_3} \times \sigma\boldsymbol{i}_{r_3}) \dots (\boldsymbol{i}_{s_u} \times \sigma\boldsymbol{i}_{r_u}) =$$
$$= \dots =$$
$$= \boldsymbol{i}_{r_1} \times K\sigma.\mu_{u-1}.\sigma\boldsymbol{i}_{r_2}.\sigma\boldsymbol{i}_{r_3} \dots \sigma\boldsymbol{i}_{r_u} =$$
$$= \boldsymbol{i}_{r_1} \times \mathscr{H}(K\sigma.\mu_{u-1}.\sigma, \sigma^{(u-2)})\boldsymbol{i}_{r_2} \dots \boldsymbol{i}_{r_u} =$$
$$\boldsymbol{i}_{r_1} \times (\Phi_{k\sigma,\sigma,\sigma}\mu_{u-1})\boldsymbol{i}_{r_2} \dots \boldsymbol{i}_{r_u}.$$

Con un procedimento analogo si ottiene la traduzione della controvarianza.

Si mette quindi esplicitamente in evidenza come le forme di nuova covarianza considerate dagli autori in realtà fanno riferimento ai tipi diversi di tensori covarianti, controvarianti e misti. Dal modo in cui si ricava la trasformazione dal punto P al punto P' si vede che si sta considerando uno spazio euclideo e in esso le trasformazioni fra vettori o differenze di punti come trasformazioni attive.

6.2.9 Forma assoluta dei simboli di Christoffel e di Riemann

Secondo gli autori i simboli di Christoffel e di Riemann risultano completamente inutili perché si possono esprimere tramite le omografie λ_2 e λ_3. Prima di generalizzare la notazione gli autori premettono quale sarà il primo passo facendo l'esempio del simbolo di Riemann (rs, tu)

> «Par ex., dans le symbole ordinaire (rs, tu) de 1er espece de Riemann, les nombres (rs, tu) sont les indices des vecteurs $\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_t, \boldsymbol{i}_u$, variables arbirariement dans le système $\boldsymbol{i}$ unitaire-ortogonal de référence. Un premier pas pour la reduction de (rs, tu) à la forme absolue c'est de l'indiquer par $(\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{i}_t, \boldsymbol{i}_u)$.»[43]

Sostituiscono allora i vettori $\boldsymbol{i}$ con dei vettori ordinari dell'S_n «qui soient, au moins en général *contants*, c'est à dire, non fonctions de P» di modo che il simbolo ordinario (rs, tu) diviene $(\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{cd})$, con $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ vettori arbitrari dell'S_n.

La corrispondenza con i simboli ordinari di Christoffel e di Riemann è data da:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \boldsymbol{c} \times \alpha\lambda_2\boldsymbol{ab}, & \text{[Christoffel di 1}^{\text{a}}\text{ specie]} \\[2ex] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{c} \times \lambda_2\boldsymbol{ab}, & \text{[Christoffel di 2}^{\text{a}}\text{ specie]} \end{cases}$$

[43] Cfr. Première partie, V, n° 10, 101.

$$\begin{cases} (\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{cd}) & = & \boldsymbol{b} \times (k^* - 1)\alpha\lambda_3 \boldsymbol{cda}, & \text{[Riemann di 1}^{\text{a}}\text{ specie]} \\ \{\boldsymbol{ab}, \boldsymbol{cd}\} & = & \boldsymbol{b} \times (k^* - 1)\lambda_3 \boldsymbol{cda}, & \text{[Riemann di 2}^{\text{a}}\text{ specie]} \end{cases}$$

È interessante vedere il modo in cui gli autori passano dall'ordinario simbolo di Christoffel all'omografia λ_2

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \frac{\partial(\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{c})}{\partial x_b} + \frac{\partial(\boldsymbol{b} \times \alpha\boldsymbol{c})}{\partial x_a} - \frac{\partial(\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b})}{\partial x_c} =$$

$$= \boldsymbol{a} \times \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{b} \times \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{ac} - \boldsymbol{a} \times \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{cb}$$

$$= \boldsymbol{c} \times \left\{ \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{ba} + \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{ab} - Kk\frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{ab} \right\} =$$

$$= \boldsymbol{c} \times \left\{ \frac{d\alpha}{dP} + k\frac{d\alpha}{dP} - kKk\frac{d\alpha}{dP} \right\} \boldsymbol{ab} =$$

$$= \boldsymbol{c} \times \{1 + k - k'\} \frac{d\alpha}{dP}\boldsymbol{ab} = 2\boldsymbol{c} \times \alpha\lambda_2\boldsymbol{ab}.$$

6.2.10 Prefazione alla seconda parte

Gli autori cominciano la prefazione della seconda parte con il commento che la prima idea di uno spazio curvo C_n ad n dimensioni immerso in uno spazio euclideo ad N dimensioni. $(N \geq n)$, E_n, deve cercarsi nel caso particolare, $n = 2$, $N = 3$ di una superficie ordinaria C_2 immersa in uno spazio euclideo a tre dimensioni, E_3. Se Q è un punto generico di C_2, funzione di due variabili numeriche u, v (coordinate di Gauss per la superficie), si ottiene con l'ausilio dell'E_3 nel quale la superficie C_2 è immersa, il ds^2, elemento lineare in C_2, espresso da una formula differenziale quadratica:

$$ds^2 = a_{11}du^2 + 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 \quad (\text{con } a_{21} = a_{12})$$

che si chiama prima forma differenziale quadratica di C_2 o metrica di C_2. Si sa che si possono esprimere con la metrica di C_2 tutte le proprietà delle superfici che restano invariate alla flessione; mentre che quelle che sono in relazione con la forma di C_2 sono date dalla seconda forma differenziale quadratica, legata alla metrica dalle formule di Codazzi.

Indicano poi che la generalizzazione di tutto ciò è semplice: si considera il punto generico Q di C_n come punto di E_n funzione di n variabili numeriche indipendenti $q_1, \ldots q_n$ e si ottiene tramite E_n il ds^2 dell'elemento lineare in C_n espresso dalla forma differenziale quadratica $ds^2 = \sum_{r,s} a_{rs}dq_rdq_s$ $(a_{rs} = a_{sr})$, chiamata anche questa: prima forma differenziale quadratica dello spazio curvo C_n, o metrica di C_n. Così lo spazio curvo C_n si studia indirettamente tramite le coordinate che anche se sono completamente generali, sono degli elementi arbitrari in relazione ad a_n e possono dare delle proprietà di C_n soltanto in un modo indiretto, tramite degli «invarianti», accompagnati quasi sempre da numerosi covarianti e controvarianti (Cfr. 1 Parte V, n 2, Nota 1).

Affermano che le coordinate di C_n e di E_N possono essere facilmente eliminate ed è proprio grazie a questa eliminazione che sono dovuti gli importanti risultati geometrici in C_n, e quelli in relazione con la critica della Relatività. La definizione diretta, assoluta e completamente geometrica dello spazio curvo effettivo C_n e dello spazio euclideo rappresentativo E_n. A un punto generico Q dello spazio C_n che è lo spazio curvo effettivo ad n dimensioni, fanno corrispondere univocamente e reciprocamente il punto generico P di uno spazio euclideo E_n ad n dimensioni, chiamato spazio rappresentativo di C_n.

Agli elementi dP di E_n (vettori dello spazio tangente) corrispondono degli elementi dQ di C_n che devono appartenere sia a E_N, lo spazio dove si effettuano le ordinarie operazioni vettoriali. Questa corrispondenza tra C_n ed E_n non ci dice niente per quanto riguarda gli elementi fuori da C_n ed E_n.

Le corrispondenza univoca e reciproca tra Q e P deve essere tale che si possa affermare l'esistenza dell'omografia reversibile $\beta = \dfrac{dQ}{dP}$ derivata di Q rispetto a P. In questo modo risulta data la dilatazione reversibile $\alpha = k\beta.\beta$. Essendo quindi $dQ = \beta dP$, segue $dQ^2 = ds^2 = dP \times \alpha dP$, prima forma differenziale quadratica di C_n.

Le formule ordinarie per gli spazi curvi sono in relazione soltanto con lo spazio rappresentativo E_n dei punti P. Otteniamo le proprietà e le formule in C_n operando direttamente nello stesso C_n con un calcolo assoluto.

6.2.11 Curvatura di C_n

Gli autori definiscono la curvatura seguendo le formule che T. Boggio aveva introdotto nelle sue note sulla Geometria assoluta degli spazi curvi:[44]

$$\mathscr{K} = \frac{\delta Q \times (\delta d^2 Q - d^2 \delta Q)}{dQ^2 \cdot \delta Q^2 - (dQ \times \delta Q)^2}$$

[44]Cfr. Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 58-62; Boggio, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 169-174; Boggio, Tommaso, «Sulla geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 54 (1918-1919), 189-200.

Questa espressione si scrive nello spazio rappresentativo E_n come:

$$\mathscr{K} = \frac{\delta P \times (k^* - 1)\alpha\lambda_3 dP\delta P dP}{dP \times \alpha dP \cdot \delta P \times \alpha\delta P - (dP \times \alpha\delta P)^2}$$

Gli autori a questo punto osservano che i vettori infinitesimali possono essere sostituiti da vettori costanti arbitrari non paralleli $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ di modo che le formule risultano:

$$\mathscr{K} = \frac{\boldsymbol{b} \times (k^* - 1)\alpha\lambda_3 \boldsymbol{aba}}{\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \alpha\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \times \alpha\boldsymbol{b})^2}$$

Questa espressione ricorda quella della curvatura sezionale della superficie in Relatività generale. Per due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ appartenenti allo spazio tangente alla varietà in un punto. La curvatura gaussiana $\mathscr{K}$ si scrive come:

$$\mathscr{K}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) = \frac{R_{\alpha\beta\lambda\mu} v_1^\alpha v_2^\beta v_1^\lambda v_2^\mu}{(g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu} g_{\beta\lambda}) v_1^\alpha v_2^\beta v_1^\lambda v_2^\mu}$$

Burali-Forti e Boggio osservano che la curvatura riemanniana $\mathscr{K}$, relativa al punto Q di C_n e agli spostamenti dQ e δQ. Si trova che $\mathscr{K}$ è funzione di dQ e δQ e dei due spostamenti di terzo ordine $d\delta^2 Q$ e $d^2\delta Q$ funzioni di d e δ, mentre la metrica α non interviene direttamente nella formula. Nello spazio E_n lo stesso numero $\mathscr{K}$ è funzione di dP e di δP e della metrica α. La differenza di comportamento di $\mathscr{K}$ nei due spazi e la seguente: in E_n il numero $\mathscr{K}$ è funzione della metrica α e dei due spostamenti dP e δP considerati isolati. In C_n la metrica α non appare esplicitamente nell'espressione di $\mathscr{K}$, mentre che grazie ai due spostamenti dQ e δQ considerati isolatamente, si trovano gli spostamenti $d\delta^2 Q$ e $d^2\delta^2 Q$ che sono in generale diversi fra loro, non sono esprimibili mediante dQ e δQ e dipendono da dQ e δQ tramite le leggi che danno gli spostamenti d e δ.

Osservano ancora che $\mathscr{K}$ si può esprimere in E_n, in funzione di due vettori finiti a e b di E_n, paralleli a dP e δP ed alla metrica α. Se $n = 3$, $\mathscr{K}$ si può esprimere in E_n in funzione della metrica e di un solo vettore $k = a \wedge b$. Non si può esprimere per $n > 3$, né per $n = 3$ in funzione di vettori finiti indipendenti da α. Questa differenza di comportamenti di $\mathscr{K}$ è importante e potrebbe giustificare il dubbio che $\mathscr{K}$ non sia un elemento geometrico importante.

6.2.12 Critica della covarianza

È noto che le leggi dell'elettrodinamica sono covarianti rispetto alla trasformazione generale di Lorentz, covarianza che risulta anche dalla forma assoluta delle equazioni. Questa proprietà è alla base della legge relativista della covarianza: ogni legge fisica si deve esprimere tramite una legge covariante rispetto ad un cambiamento di coordinate qualunque. Gli autori cominciano così con la critica della, dal loro punto di vista, pretesa generalizzazione della covarianza Lorentz, realizzata tramite delle trasformazioni che non esistono in natura: le trasformazioni generali di coordinate.

Dal loro punto di vista le leggi che giustificano una tale covarianza sono tutte molto vaghe, la più esplicita sembra essere il fatto che la covarianza conserva l'elemento di linea. Trovano però questa giustificazione priva di senso. Si chiedono: «In un universo fisico nel quale le grandezze si contraggono sempre, che senso possono avere delle trasformazioni che conservano le lunghezze?».

Per Boggio e Burali-Forti le trasformazioni di Lorentz generali sono considerate nella forma assoluta in cui Marcolongo aveva scritto le trasformazioni di Lorentz. Si riferiscono a questo lavoro del quale ne lodano sia l'eliminazione delle coordinate, sia l'utilizzazione di uno spazio a tre dimensioni più il tempo invece delle quattro dimensioni di Minkowski.

Questa critica del principio di covarianza generale non è isolata. Già nel 1917 E. Kretschmann difendeva l'idea che la covarianza generale non aveva un contenuto fisico reale e non rappresentava in realtà una generalizzazione del principio di Relatività.

Gli autori però portano avanti la loro critica basandosi più sugli aspetti matematici che sul dibattito filosofico e inseriscono digressioni di tono ironico e volutamente polemico. La loro critica alla covarianza generale si basa sul fatto che esistono diversi tipi di covarianza, dei quali non può però rendere conto l'ordinario calcolo con coordinate. In particolare esistono due tipi di covarianza che conservano il ds^2.

La funzione fondamentale della teoria della Relatività risulta essere per loro un covariante del primo tipo (non di secondo tipo), per cui volendo costruire una teoria basata sulla covarianza di secondo tipo, diventerebbe necessario sostituire la funzione fondamentale con una nuova funzione dando origine a due meccaniche fisicamente inammissibili invece di una sola.

Essendo poi la funzione Ψ un covariante di E_n è possibile indicare con i procedimenti indicati nella sezione precedente, il corrispondente invariante di C_n che però ha una dipendenza complicata in funzione di Q, non si può esprimere semplicemente come una funzione dei differenziali dQ e δQ. Ci sono quindi dei dubbi sulla sua natura di elemento fondamentale della teoria.

Questo punto appare però oscuro, a nostro avviso, Burali-Forti e Boggio fanno confusione tra sistemi covarianti e covarianza delle equazioni. La critica sembrerebbe diretta contro la covarianza generale, ma invece si parla di covarianza di primo e di secondo tipo che sono invece legate al concetto di sistema multiplo covariante.

Boggio espone i suoi dubbi sulla covarianza a Levi-Civita e in una lettera del 5 maggio 1923 lo ringrazia per il suo chiarimento insistendo su quella che sarà la critica principale alla covarianza:

> «Grazie pure (benché con ritardo) per la delucidazione che mi hai dato circa la covarianza, essa collima con quella data a pag. 127 del libro di Becquerel sulla relatività.[45]. Però mi pare di aver letto in qualche posto che si prende la covarianza perché essa conserva il ds^2; ciò mi pare non basti perché ci sono trasformazioni non covarianti che pure conservano il ds^2.»[46]

6.2.13 Forma assoluta del tensore d'energia e del tensore gravitazionale

Nel capitolo V, n° 4 della seconda parte gli autori si propongono di scrivere in forma assoluta il tensore energetico dei relativisti.

Se τ è una dilatazione, i numeri T_{ij} si ottengono nel seguente modo:

$$T_{ij} = \boldsymbol{a}_i \times \tau \boldsymbol{a}_j \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

Seguono una serie di domande sull'interpretazione del tensore energetico. Il tensore gravitazionale

$$G_{ik} = \sum_{h=1}^{4} \{ih, hk\}$$

si esprime in forma assoluta come:

$$G_{ik} = \boldsymbol{a}_i \times vK(1 - k^*)\lambda_3 \boldsymbol{a}_k$$

e si sostituisce quindi il tensore G_{ik} con l'omografia

$$(3) \qquad \Psi = vK(1 - k^*)\lambda_3$$

L'omografia Ψ è una dilatazione, cioè $K\Psi = \Psi$ ed è covariante di prima specie «para rapport à toutes les transformations».[47].

[45] Si tratta senz'altro di Jean Becquerel e non di Henri Becquerel e potrebbe trattarsi del volume Becquerel, Jean, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1922, citato da Marcolongo in Marcolongo, Roberto, *Relatività, seconda edizione*, Messina, Principato, 1923, 25.

[46] Cfr. Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica Applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873-1941). Quaderni P.RI.ST.EM. N.14. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2003, 520.

[47] Cfr. Prima parte, IV, n° 8, (4)

Si definisce poi l'omografia θ tramite l'omografia Ψ come

$$\theta = \Psi - \frac{1}{2} I_1(\Psi\alpha^{-1}).\alpha \tag{4}$$

che viene considerata nelle forme abituali come

$$A_{ik} = \frac{1}{\chi}(G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G)$$

dove $G = I_1(\Psi\alpha^{-1})$. θ è il tensore di gravitazione in forma assoluta. θ è una dilatazione ($K\theta = \theta$).

Gli autori considerano che la Ψ è stata stabilita in forma arbitraria

> «[...] la relation (3) [$\Psi = vK(1 - k^*)\lambda_3$] établit Ψ d'une façon d'*une façon toute a faite arbitraire* (la *covariance* exceptée, bien entendu). Mais si la fonction fondamentale, la clef de voûte, est *arbitraire* toute est également *arbitraire*. Il est vrai qu'on n'aperçoit pas tout ce comble d'arbitre dans les formules habituelles compliquées, quoique raccourcies au moyen des symboles à trois o quatre indices, mais cela est bien visible, au contraire, avec les élements absolus»[48]

Abbiamo citato questo paragrafo un po' più estesamente perché contiene un'idea importante che viene ripresa anche nella Nota I e cioè che il formalismo assoluto permetterebbe quindi di mostrare le complicazioni di certe espressioni che non sarebbero per questa ragione fondamentali in natura.

Insistono poi sul fatto che negli studi ordinari di relatività si trovano soltanto vague giustificazioni della scelta del tensore relativo all'omografia Ψ: è covariante, e aggiungono:

> «Oui, mais covariante d'espèce 1, et nous pouvons introduire un autre Ψ covariante d'espèce 2 (inconue aux relativistes) avec laquelle aussi le ds^2 ne changera pas, mais toute la Mécanique relativiste changera radicalement.»[49]

La Ψ poi è la forma più semplice funzione soltanto delle derivate seconde di α ma –si chiedono– perché bisognerebbe formarsi alla derivata seconda, visto che esistono sistemi multipli anche a quattro o cinque indici, perché avrebbe dovuto la natura arrestarsi con i simboli di Christoffel o di Riemann. Segue un commento un fatto che il potenziale gravitazionale m/r è probabilmente soltanto una approssimazione di un potenziale dato da una serie di potenze negative di r.

[48]Cfr. Deuxième partie, V, n° 5, 228.
[49]Cfr. Deuxième partie, V, n° 5, 228.

6.2.14 Discussione sulla deduzione dell'equazione della gravitazione dal principio di Hamilton

La seconda parte del libro si conclude con la deduzione dell'equazione generale della gravitazione dal principio generalizzato di Hamilton. Gli autori si rifanno al lavoro di A. Palatini: *Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton*[50], in particolare, in relazione alla spiegazione del significato del simbolo di variazione rispetto alla metrica, δ, che considerano la più concreta fra le opinioni dei vari autori[51] Commenteranno più tardi che questa condizione sulla δ non è a loro avviso sufficiente. Si parte dall'espressione del principio variazionale

$$\delta \int H dS = 0$$

Dove H si esprime in forma assoluta come

$$H = I_1 \left\{ (\Psi + \chi\tau)\alpha^{-1} \right\}$$

e dS elemento di volume in un punto generico dello spazio-tempo per procedere nella dimostrazione dell'espressione che li condurrà ad affermare che da

$$\delta(\sqrt{I_4\alpha}.\tau) = 0$$

si può ottenere

$$I_1 \left[(\theta + \chi\tau)\delta\alpha^{-1} \right] dS = 0$$

condizione che deve valere per $\delta\alpha^{-1}$ arbitrario e che conduce quindi a

$$\theta + \chi\tau = 0$$

La discussione riguardante l'interpretazione della δ, come variazione rispetto alla metrica α soltanto, o anche come variazione rispetto al punto P, aveva già avuto luogo due anni prima, come testimoniano le lettere di C. Burali-Forti a T. Levi-Civita del maggio 1922.[52] Nelle lettere Burali-Forti discute sull'eventuale variazione in relazione alla derivata rispetto al punto, proponendo

[50] Palatini, Attilio, «Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLIII (1918-1919), 203-212.

[51] Senza altri commenti ne citazioni.

[52] Cfr. Lettere di C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, Fondo Levi-Civita, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma. Le lettere (a cura di Umberto Lucia) sono state pubblicate nel volume Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica Applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873-1941). Quaderni P.RI.ST.EM. N.14. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2003.

a Levi-Civita alcuni sviluppi facenti uso del calcolo assoluto. Levi-Civita risponde sempre con gentilezza come si può dedurre dalle lettere stesse del Burali. Come farà anche T. Boggio, Burali-Forti non perde l'occasione di mostrare a Levi-Civita le bontà del calcolo assoluto:

> «Prima di indicarle una curiosa conseguenza della (1) [$\delta(\sqrt{g}T_{ij}) = 0$] devo premettere alcune formule: poca cosa!»[53]

e ancora

> «Ho perfettamente capito il divario della premessa come Ella me lo ha chiaramente esposto. Ora debbo confessarle francamente che non mi convince. [...] Una conferma dei miei dubbi la trovo nello sviluppo dei calcoli sotto forma assoluta (cioè del tutto priva di coordinate) per le varie parti della relatività.»[54]

seguono diversi calcoli che secondo Burali-Forti sono stati in parte realizzati da T. Boggio. La corrispondenza si conclude con una cartolina di Burali-Forti nella quale l'autore riconosce di aver considerato erroneamente un'ipotesi che non era contenuta nelle spiegazioni del Levi-Civita:

> «Nella Sua lettera del 18 mi dava come caratteristica del δ la *sola* condizione "le $\delta g^{(ij)}$ sono arbitrarie" il che equivale alla *sola* condizione "$\delta\alpha$ è arbitrario"; ma nulla era detto per il punto P e dunque per δP. [...] Così io le ho fatto perdere del tempo con l'esame della mia imperfetta questione; il danno Suo, del quale mi spiace, è compensato dall'essere stata chiarita una questione che si presentava sotto forma non completamente determinata.»

Nonostante ciò l'argomento si riapre nell'*Espaces Courbes* che si conclude esprimendo il dubbio e lasciando al lettore la decisione se sia possibile o meno dedurre l'equazione della gravitazione dal principio di Hamilton.

6.2.15 Invarianti di C_n

Nella Nota I gli autori dimostrano come sia sempre possibile dati gli invarianti, covarianti e controvarianti di E_n ottenere degli invarianti di C_n.[55] Per

[53] Cfr. C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 15.5.1922, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[54] Cfr. C. Burali-Forti a T. Levi-Civita, 21.5.1922, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[55] C_n è lo spazio curvo, praticamente lo spazio Q.

far questo bisogna prima introdurre le omografie β e β' che mettono in relazione i punti dello spazio euclideo, detto spazio P, con i punti di uno spazio, detto Q, che può anche essere non euclideo. (In questo caso i calcoli si fanno considerando lo spazio Q contenuto in uno spazio euclideo di dimensione superiore). È possibile mettere in relazione le omografie σ, β e β', risulta allora che $\sigma = \beta^{-1}\beta'$. Utilizzando questa espressione per l'omografia σ, la proprietà $\Phi_{\sigma\sigma',(r)} = \Phi_{\sigma',(r)}\Phi_{\sigma,(r)}$ oltre alle proprietà che mettono in relazione covarianza e controvarianza si ottiene che dalla definizione di covarianza in E_n cioè

$$\Phi_{\sigma,(r)}\theta_P\mu = \theta_{P'}\mu$$

segue che

$$\Phi^{(r)}_{\sigma\beta}\theta_P\mu = \Phi^{(r)}_{\sigma\beta'}\theta_{P'}\mu$$

lo stesso vale per la controvarianza. Se μ_u è un covariante o un controvariante di specie r relativamente ad una delle trasformazioni da P a P' allora $\Phi^{(r)}_{K\beta}\mu_u$ e $\Phi_{K\beta,(r)}\mu_u$ sono invarianti di C_n sono cioè funzioni di Q indipendenti dalla trasformazione β particolare tra Q e P e da ogni trasformazione σ da P a P'.

Secondo Burali-Forti e Boggio, gli invarianti i covarianti e i controvarianti di E_n possono avere un ruolo geometrico importante, che però appare soltanto ed in modo assoluto, determinando i corrispondenti invarianti di C_n. Se questi invarianti risultano complicati e artificiosi o sprovvisti di caratteristiche geometriche importanti, si potrà concludere che gli elementi corrispondenti di E_n dedotti tramite le coordinate sono anche loro privi di importanza. Non basta quindi l'invarianza, e nemmeno l'invarianza in C_n, gli invarianti che si ottengono devono avere un'espressione semplice in funzione di Q.

Questa combinazione di covarianti e controvarianti in realtà ciò che realizza è quella che in coordinate chiameremo a saturazione degli indici in modo che l'oggetto risultante risulta effettivamente un invariante.

6.3 La posizione di R. Marcolongo

Nella prefazione del *Relatività* di Marcolongo si legge in riferimento al calcolo assoluto:

> «Anche alla teoria della Relatività sono applicabili, con completo successo, i metodi delle omografie vettoriali di cui, da molti anni, facciamo uso e ci sforziamo di diffondere, il Prof. Burali-Forti ed

io. In recenti lavori a stampa, in alcuni lavori scolastici, si è mostrato come tutta la teoria dei simboli di Christoffel e di Riemann possa essere semplificata e sintetizzata colla sola considerazione di due omografie, che hanno pure fondamentale importanza nella teoria della Relatività. Ma il seguire per tale via mi avrebbe costretto a valermi delle parti più astratte e più complesse di teorie che non sono ancora conosciute da tutti; non avrei, nell'interesse immediato della Relatività fatto opera di volgarizzazione e di diffusione; non avrei agevolato lo studio (meno che ad un piccolo numero di iniziati) a coloro che vorranno approfondire le memorie originali. Del resto nella scienza non ci sono esclusivismi; tutte le vie che conducono alla scoperta, alla conoscenza del vero sono belle ed aspre ad un tempo e tutte libere nello sconfinato e sconosciuto oceano del sapere.»[56]

Marcolongo citerà anche all'interno del suo volume i lavori di Boggio e Burali-Forti sugli spazi curvi apparsi prima dell'*Espaces Courbes* dopo i lavori di semplificazione ed esposizione sintetica del calcolo differenziale assoluto e gli spazi curvi, con la seguente frase significativa:

«ispirati ai metodi vettoriali italiani e degni della più alta considerazione per eleganza e semplicità.»[57]

Marcolongo pubblicò una serie di lavori sull'elettrodinamica che, come abbiamo detto, ebbero grande importanza per gli autori dell'*Espaces Courbes* e come vedremo furono oggetto anche di polemica. Riportiamo alcuni passi da Marcolongo, Roberto, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M., 1935.

«Il resto dei miei lavori in questa parte riguarda l'elettrodinamica. [...] presentata all'Acc. dei Lincei nei primi mesi del 1906, contiene una deduzione, con metodi vettoriali, degli integrali dell'equazioni dell'elettrodinamica di Lorentz; poscia sostituendo $u\sqrt{-1}$ al posto di t, si assoggettano le variabili spaziali e temporali, ad una trasformazione ortogonale; in breve dunque si considerano quelle trasformazioni, studiate quasi contemporaneamente dal Poincaré, e che ora generalmente si chiamano "trasformazioni di

[56]Cfr. Marcolongo, Roberto, *Relatività, seconda edizione*, Messina, Principato, 1923, VIII. Citiamo la seconda edizione del libro che è quella da noi consultata, ma il commento fa parte della prefazione della prima edizione.

[57]Cfr. Marcolongo, Roberto, *Relatività, seconda edizione*, Messina, Principato, 1923, 25-26.

> Lorentz"; inoltre si dimostra come tutti gli elementi del campo così trasformato si esprimano mediante i primitivi.
>
> È questa la via che poi ha seguito due anni dopo e con tanto successo H. Minkowski, e che io ho appena iniziata. Resta però vero, come ha scritto un illustre scienziato in un rapporto alla Società pel Progresso delle Scienze, che "in questa nota è chiaramente indicato, se non compiuto, lo sfruttamento sistematico delle trasformazioni di Lorentz per trattare problemi elettromagnetici dei corpi in movimento".
>
> Le ulteriori note [...] riguardano la stessa questione delle trasformazioni lorentziane trattate coi metodi delle omografie vettoriali, evitando l'impiego dell'immaginario, dei vettori a quattro dimensioni, usati da Minkowski, Sommerfeld e v. Ignatowski, dei quaternioni; si danno mercè l'uso di operatori introdotti da Burali e da me, di un numero reale e di una omografia, tutte le formule esplicite esprimenti gli elementi fisici più notevoli del campo trasformato in funzione dei primitivi. La estesa memoria in francese, [...], scritta per invito di E. Cosserat, è una esposizione più completa e particolareggiata dei lavori precedenti.
>
> L'impiego della teoria delle matrici, o di altre teorie, permette naturalmente la risoluzione delle stesse questioni in altri svariati modi; ma io non volevo valermi che delle omografie e, in questo campo, la soluzione presenta il minimo di semplicità. Mi sia lecito tuttavia concludere, non vedendomi autorizzato a pubblicare quanto illustri matematici ebbero a scrivermi a proposito di una incresciosa polemica, riportando quanto l'illustre Prof. Levi-Civita scriveva su "Scentia" v. 11: "Lussureggianti sviluppi del principio di relatività si devono a Minkowski e Sommerfeld, che ebbero in Marcolongo un precursore sagace".

Una lettera di Marcolongo a Sommerfeld confermerebbe che la polemica sarebbe stata legata a un problema di priorità:

> «Lettera di R. Marcolongo ad A. Sommerfeld [Reale Università di Napoli. Gabinetto di Meccanica razionale]
>
> M. Levi-Civita a eu la bonté de me signaler, il y a quelque temps, vos important travaux "Zur Relativitätstheorie" parus dans les volumes 32 et 33 des *Annalen der Physik*.
>
> Je me suis aussi occupé de cette théorie et je viens de publier quelques notes dans les «Rendiconti dell'Acc. di Napoli (1912)»;

je me suis fait un devoir de vous envoyer mes deux premières notes l'année dernière; mais il est très probable que vous ne les ayez pas reçues. Je me permets de vous les envoyer de nouveau et je vous serais bien reconnaissant si vous pouviez m'envoyer vos mémoires des *Annalen der Physik*

Je voudrais bien fixer votre bienveillante attention sur deux point fondamentaux.

1° *L'idée de considérer les transformations orthogonales à quatre variables* $x, y, z, u = it$ (allgemeine Lorentz-transformationen), idée dont le bien regretté Minkowski a su tirer des conséquences si importantes, a été exposée par moi dans un mémoire: *Sugli integrali delle equazioni dell'eletrodinamica*, parue dans le *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, s. V, v. 15, (1° sem. 1906) pp.344-349. Et c'est bien encore dans ce petit mémoire que j'ai aussi observé qu'il ne faut pas faire de calculs pour prouver que les équations de l'électrodynamique se transforment en elles mêmes pour la plus générale transformation de Lorentz. C'est le commencement de la voie que Minkowski a ensuite suivi avec tant de succès en 1908; et vous en faites l'observation très-juste à la page 656 de votre second mémoire.

M. Levi-Civita a faite mention de mon mémoire dans son Rapport à la Società per il progresso delle Scienze (Roma, ottobre 1911: Estensione ed evoluzione della Fisica matem., pag. 17. Ce rapport a été aussi imprimé dans *Scientia*, vol. XI). Je regrette de n'avoir plus de copies de ce mémoir.»[58]

Marcolongo da una parte rivendica che ha introdotto le trasformazioni ortogonali a quattro variabili, ma dall'altra trasmette a Sommerfeld il fatto che è riuscito a esprimere le trasformazioni di Lorentz senza introdurre gli immaginari e senza usare i vettori a quattro dimensioni.

«2° La théorie des homographies vectorielles dont M. Burali et moi nous avons récemment exposé les fondements (Analyse vectorielle générale. I. Transformations linéaires. Pavie, 1912) permet d'exposer toute la théorie de la relativité et des transformations générales de Lorentz sans introduire les imaginaires et sans faire usage des vecteurs à quatre dimensions.

[58]Cfr. R. Marcolongo a A. Sommerfeld, 2.05.1913, Deutsches Museum München, Archiv, HS 1977-28/A 218.

> C'est ce que j'ai montré dans les mémoires que j'ai l'honneur de vous envoyer. Ce sera aussi l'objet d'un chapitre du 2eme volume des transformations linéaires (qui paraîtra bientôt).
>
> Ainsi, par exemple, les formules (1), (3), (5), (7) de mon second mémoire, aussi bien que les formules (10) et (11) expriment, si je ne me trompe, de la manière la plus simple et la plus élégante les grandeurs (vecteurs) m', e', ρ', v' du système transformé au moyen des grandeurs (vecteurs) primitives et réciproquement, sans se servir de la règle de Minkowski et d'une manière tout à faite absolue.»[59]

La corrispondenza fra Roberto Marcolongo e Tullio Levi-Civita offre alcune testimonianze della volontà di Marcolongo di cercare di estendere i metodi vettoriali alla Relatività generale[60]:

> «Mille affettuose grazie pel gentile invio del cospicuo blocco delle tue ultime pubblicazioni. Esse mi interessano a punto che le porto con me in campagna e voglio col loro studio approfondito iniziare la ripresa dei miei studi. Io ho qualche speranza che i metodi delle omografie, di cui sperimentai l'efficacia nello studio delle trasf. di Lorentz, possa rendere qualche servigio anche nel campo da te, col solito acume, esplorato. Conosco poco gli ultimi lavori dell'Einstein perché i Rend. di Berlino qui non arrivano: ma spero che i tuoi lavori mi rischiareranno completamente. Se mai ricorrerò a te per un breve prestito.»[61]

> «Io dunque questo anno farò il corso sulla relatività, nella speranza di poter applicare le omografie. Per ora, naturalmente, nel corso seguirò i metodi di Ricci che sono assai lieto aver conosciuto e approfondito.»[62]

> «Quanti punti oscuri mi sono stati chiariti dalle tue belle, elegantissime note! Mi è venuto il desiderio di approfondirle e, in qualche modo, esporle a lezione. Ed ho ricominciato lo studio minuto delle Méthodes de calcul differ. etc. Ma come è stringata

[59]Ibidem nota precedente.

[60]Ringrazio il Prof. Pietro Nastasi per avermi gentilmente inviato le sue trascrizioni della corrispondenza.

[61]Cfr. R. Marcolongo a T. Levi-Civita, 20.07.1917, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[62]Cfr. R. Marcolongo a T. Levi-Civita, 14.9.1918, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

la esposizione! A molte dimostrazioni, con un po' di pazienza, ho sopperito da me; in altre mi sono stancato o imbrogliato come uno scolaretto. E quindi eccomi a darti un'altra noia. In quali corsi litografati del Ricci potrei io trovare uno sviluppo più accessibile di questi Metodi? Potrei acquistare copia di questi corsi? Malgrado che io abbia già inviato il titolo del Corso di Mecc. superiore pel nuovo anno scolastico, la tentazione di fare una escursione nella nuova Meccanica è forte assai: anche perché non vi ha mezzo migliore per imparare! E poi vorrei conoscere proprio bene il già fatto, prima di cimentare alla nuova teoria i metodi vettoriali.»[63]

6.4 La ricezione

6.4.1 Recensione di P. Straneo

Paolo Straneo (1874-1968), pubblica la sua recensione dell'*Espaces Courbes* nella «Sezione storico bibliografica» del *Bollettino di matematica*, nel 1925[64]. Laureato in Ingegneria presso il Politecnico di Zurigo nel 1896, con il massimo dei voti, ricoprì la cattedra di Fisica-matematica a Genova dal 1925, si occupò delle teorie relativistiche, di cui era profondo conoscitore. Conobbe Einstein durante i suoi studi a Zurigo e scambiò con lui alcune lettere. Lavorò sulla scia di H. Weyl sulle varietà riemanniane, in particolare sull''eventuale significato fisico della torsione dello spazio. Nel 1955 pubblicò *Cinquant'anni di Relatività* all'età di 81 anni.[65]

Straneo dichiara di averci pensato a lungo prima di «tentare l'impresa»

[63]Cfr. R. Marcolongo a T. Levi-Civita, 3.11.1918, Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma, Fondo Levi-Civita.

[64]Straneo, Paolo, «Considerazioni generali sulle critiche della teoria della relatività», *Il Bollettino di Matematica*, (2) IV (1925), I-XII.

[65]Cfr. Barberis, Bruno, «Paolo Straneo», in Roero, Clara Silvia, (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1898. Tomo secondo. I docenti*, Torino, Centro di Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti IX, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999, 555. Come curiosità riportiamo che C. Burali-Forti aveva pensato a P. Straneo per redigere un volume di applicazioni tecniche per l'*Analisi Vettoriale Generale*: «Per le applicazioni tecniche occorre un ingegnere; ma questi deve *possedere interamente* i metodi vettoriali-omografici. Crede Lei che lo Straneo sia adatto allo scopo? Lo tasti così alla lontana; vedremo se si può combinare, d'accordo col comitato direttivo di A.V.G. per un volume *tecnico.*» Cfr. C. Burali-Forti a G. Vacca, 9.06.1919 in Nastasi, Pietro & Scimone, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1995, 24.

di esaminare l'*Espaces Courbes*. Definisce il volume come «una delle più singolari trattazioni intorno alla teoria della Relatività che è veramente difficile giudicare o anche solamente caratterizzare in una breve recensione». Giustifica in questo modo la necessità di eccedere i limiti delle consuete recensioni, animato dalla «forma estremamente vivace della trattazione» che invita, «alla libera discussione delle tesi dei chiari autori». Si prefigge quindi l'obbiettivo di analizzare in che modo e fino a che punto, gli autori sono in grado di dedurre le conclusioni di estrema generalità che si sono prefissi i.e. evidenziare le «incongruenze matematiche nelle basi stesse della teoria della Relatività».

Colloca i vari studiosi e cultori della disciplina in due categorie a seconda dell'approccio alla teoria. Secondo l'autore la Relatività può essere trattata in modo proficuo soltanto da coloro che sono in grado di conoscerne simultaneamente tanto la fisica quanto le difficoltà matematiche, data l'impostazione della teoria. Numerosi inconvenienti derivano dai contributi di coloro che anche padroneggiandone uno dei due aspetti, hanno una conoscenza soltanto parziale dell'altro.

Uno degli aspetti particolarmente dibattuti è quello della correlazione fra spazio e tempo in Relatività che come ricorda Straneo «solo recentemente» è stato preso in considerazione dallo stesso Einstein. Secondo Straneo, Burali-Forti e Boggio si sono scagliati più che «con la teoria della Relatività, con il loro contorno più o meno paradossale».

Straneo individua il problema fondamentale della trattazione, nell'utilizzazione di una metrica definita positiva che rende un nonsenso qualsiasi conseguenza tratta dagli enunciati presi in considerazione. Infatti, nella sua lunga introduzione osserva che la correlazione fra spazio e tempo che si presenta in Relatività generale, rende necessaria la considerazione di una metrica che non può essere definita positiva, come invece è quella presentata dagli autori ed espone la questione nel seguente modo: la forma differenziale quadratica prima si interpreta geometricamente come l'espressione, in una varietà, della distanza fra due punti infinitamente vicini. Si esprime generalmente con una equazione del tipo:

$$dl^2 = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k$$

che per intuitive ragioni geometriche deve essere definita positiva.

Per la caratterizzazione dello spazio-tempo sono necessarie forme non definite. $ds^2 = 0$ significa che due punti sono posti in relazione da un raggio di luce.

Nella geometria differenziale si consideravano d'ordinario solamente forme differenziali quadratiche definite positive, perché pareva che le altre fossero prive di interessa geometrico, invece la condizione di iperbolicità dello spazio tempo deve essere in tutti i casi rigorosamente mantenuta.

Passa poi all'esame dell'opera di Burali-Forti e Boggio.

Emette il seguente giudizio nei confronti degli autori, dimostrando per loro grande considerazione:

> «Ma la stima che tutti abbiamo per i nostri autori non ci permette evidentemente di arrestarci alla lettura della prefazione. [...]
>
> L'importanza dei risultati raggiunti è riconosciuta da tutti, anche da coloro che non ritengono opportuno trattare *esclusivamente* con metodi vettoriali le questioni della meccanica e della fisica, ma che preferiscono un indirizzo eclettico».[66]

Per Straneo gli autori si propongono di

a) Estendere agli spazi lineari a n dimensioni i risultati della teoria delle omografie vettoriali noti per spazi euclidei a 3 dimensioni.

b) Estendere i risultati agli spazi curvi a n dimensioni.

Straneo osserva:

> «Sembra che si rasenti qualche equivoco ove si parla dell'S_n lineare come dello spazio-tempo della relatività. (Cosa che non è detta esplicitamente ma che si potrebbe sottintendere). Ma effettivamente poi lo sviluppo dei cinque capitoli della prima parte avviene invece in modo piano e inequivocabile. Il capitolo I è dedicato allo studio dei vettori e delle operazioni elementari su di essi, in uno spazio lineare S_n qualsiasi. Nel capitolo II le omografie di ordine uno e nel capitolo III le omografie generali e gli operatori. L'inevitabile complicazione dovuta alla grande generalità in cui ci si è posti è abilmente contenuta in limiti ancora accettabili.[67] Nel Capitolo IV, nei primi due paragrafi, si considerano gli operatori differenziali dell'S_n sviluppo del programma tracciato dal prof. Pensa in Geometria assoluta dei vettori e delle omografie vettoriali in un S_n strettamente euclideo. Dal paragrafo terzo in poi le note di Boggio sulla geometria assoluta degli spazi curvi del 1919. Spazi curvi Q_n immersi in spazi euclidei S'_n con $n' > n$. Il capitolo V è dedicato all'eliminazione delle coordinate dal calcolo differenziale assoluto.»[68]

[66]Cfr. Straneo, Paolo, «Considerazioni generali sulle critiche della teoria della relatività», *Il Bollettino di Matematica*, (2) IV (1925), I-XII, X.

[67]Vogliamo sottolineare la benevolenza di questo commento di Straneo.

[68]Ibidem nota precedente.

Straneo si chiede: «Ma questo risultato è esso effettivamente ottenuto senza restringere la portata o meglio il campo di applicazione di tale calcolo?». Insiste ancora sul fatto che tutto il capitolo è dominato dall'ipotesi che la forma fondamentale o il ds^2 caratteristico del continuo considerato, che è sempre supposto completamente generale nel calcolo differenziale assoluto, deve ora aver invece la forma:

$$ds^2 = dQ \times dQ = dP \times \alpha dP$$

dQ e dP elementi lineari opportunamente definiti nello spazio eventualmente curvo Q_n e nello spazio sempre euclideo P_n con α omografia dilatazione introdotta da Boggio per giungere alla precedente espressione del ds^2, espressione che esclude tutti gli spazi nei quali l'invariante ds^2 è di tipo iperbolico.

Secondo Straneo:

> «tutto ciò non toglie il notevole valore dello studio in esame per quanto riguarda le consuete applicazioni geometriche negli spazi a metrica definita positiva, ma lascia perplessi per quanto riguarda le consuete applicazioni alla relatività.
>
> Nella seconda parte, conservando l'ipotesi precedente circa il ds^2 e supponendo continuamente nelle loro dimostrazioni che gli spazi curvi da loro considerati siano di natura corrispondente a quelli che nella geometria differenziale ordinaria si ritengono caratterizzate da forme definite positive, forniscono essi stessi ripetutamente la dimostrazione di essersi posti fuori dal campo della relatività.»[69]

Gli autori dell'*Espaces Courbes* risponderanno a Straneo ribadendo fondamentalmente i loro argomenti, in particolare insistendo sul fatto del diverso tipo di covarianza che conserva la metrica e che darebbe luogo ad una nuova meccanica einsteniana.[70]

In relazione alla recensione di P. Straneo e, ovviamente ammettendo la considerazione da parte degli autori di una metrica definita positiva, vorremo osservare però che la considerazione di un'immersione in uno spazio euclideo ambiente, non costituisce un trattamento esclusivo degli autori. Lo stesso Levi-Civita nel suo lavoro del 1917 nel quale deduce fra le altre cose le equazioni del trasporto parallelo, usa l'immersione in uno spazio ambiente euclideo piatto. «Il parallelismo così ottenuto risulta *a posteriori* indi-

[69]Ibidem, XI-XII.

[70]Cfr. Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, «Osservazioni sopra un articolo del Prof. P. Straneo», *Il Bollettino di Matematica*, 4 (1925), LXVII-LXVIII.

pendente dall'immersione ed è quindi intrinsecamente associato alla varietà riemanniana»[71]. Con le parole di Levi-Civita:

> «A giustificazione di questa definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento elementare per le V_n euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perché in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di V_n, e non anche dall'ausiliario spazio ambiente S_N.»[72]

6.4.2 Recensione di G. Y. Rainich

George Yuri Rainich (1886-1968) pubblica nel 1926 una recensione dell'*Espaces Courbes* nelle pagine del *The American Mathematical Monthly*[73]. Di origine russa, studiò matematica nelle università di Odessa, Göttingen e Munich, ottenendo il magistero in matematica pura presso l'Università di Kazan nel 1913. Insegnò a Kazan e Odessa fino al 1922, anno in cui emigrò verso gli Stati Uniti. Fu «Johnston Scholar» presso la Johns Hopkins University dal 1923 al 1926 e ordinario di matematica presso la Università di Michigan in Ann Arbor fino al 1956. Nonostante il suo interesse principale fosse nel campo della Relatività generale, Rainich studiò anche la teoria elettromagnetica, le funzioni lineari di vettori e funzioni analitiche di vettori. Insegnò Geometria, Algebra superiore, Analisi vettoriale, Teoria della probabilità e Fisica-matematica. Nel 1924, trovò un insieme di condizioni equivalenti perché una varietà lorentziana ammetta una interpretazione some soluzione esatta di campo eletromagnetico puro in relatività generale, note come le condizioni di Rainich.[74]

La recensione di Rainich comincia con queste parole:

> «This book by two known Italian mathematicians makes one feel

[71]Cfr. Pizzocchero, Livio, «Geometria differenziale». In: Di Sieno, Simonetta, Guerraggio, Angelo, & Nastasi, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 321-379, 336-337

[72]Cfr. Levi-Civita, Tullio, «Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 42 (1917), 173-215, 2.

[73]Rainich, George Yuri, «Reviews: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *The American Mathematical Monthly*, 33, 10 (1926), 515-517.

[74]*A Guide to the George Yuri Rainich Papers, 1941-1981.* The Center for American History, University of Texas at Austin. http://www.lib.utexas.edu/taro/utcah/00207/cah-00207.html (1 maggio 1927). Goenner, Hubert F. M., «On the History of Unified Field Theories» http://www.livingreviews.org/lrr-2004-2, © Max Planck Society.

> sad. It is an example of how intolerance can mislead even powerful minds in a field where we would least expect it.»[75]

Per cercare di chiarire la situazione Rainich ricorda l'esistenza di due metodi in geometria: il metodo sintetico che prende direttamente in considerazione gli oggetti di studio e il metodo analitico che anche se introduce degli elementi estranei, come gli assi di coordinate, costituisce lo strumento potente delle formule, e parla dei tentativi (a partire da Leibniz) di ideare «a direct geometrical analysis». Purtroppo, per l'autore, il numero dei linguaggi geometrici proposti è immenso ed ha dato luogo a manifestazioni di partigianeria o di una sorta di nazionalismo e mancanza di tolleranza o belligeranza verso altri sistemi. Segue:

> «The most militant of these systems originated in connection with the attempt of unification of notations; C. Burali-Forti, one of the authors of the book under review, is the moving spirit of this school.»[76]

L'autore considera che la scelta di un sistema sia una questione di gusto e di pratica e trova utile imparare come passare da un sistema di notazioni ad un altro.

Considera degno di lode il tentativo di eliminare ogni elemento estraneo dalla teoria degli spazi curvi ma

> «it must be said at once that in spite of some good ideas (they recognize, for instance, the importance for the theory of what they call homographies, i.e. linear and multilinear vector functions) their attempt results in a *failure.*»[77]

Critica gli autori per non essere riusciti ad introdurre il concetto fondamentale della teoria degli spazi curvi, il tensore di curvatura o di Riemann, in modo intrinseco o assoluto. Sono rimasti, a suo avviso a metà strada, perché hanno usato una rappresentazione in uno spazio euclideo, che come gli autori stessi riconoscono comporta un certo livello di arbitrarietà. Ma secondo Rainich la cosa veramente strana è che per il fatto di aver introdotto il tensore con l'aiuto di nozioni non intrinseche concludono che il tensore di Riemann è un oggetto di scarsa importanza. Insiste comunque che è possibile introdurre il tensore di Riemann in forma intrinseca e di fatto gli autori non si arrestano molto lontano da questo obbiettivo quando definiscono la curvatura

[75] Cfr. Rainich, George Yuri, «Reviews: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *The American Mathematical Monthly*, 33, 10 (1926), 515-517, 515.

[76] Ibidem nota precedente.

[77] Ibidem nota precedente.

riemanniana. Sarebbe bastato osservare che la curvatura riemanniana in un dato punto (da loro introdotta intrinsecamente) determina completamente il tensore di Riemann in quel punto.

Rainich osserva che gli autori portano avanti la critica della teoria seguendo alcune argomentazioni che non possono essere prese sul serio e che non potrebbero essere discusse senza entrare in polemiche che andrebbero più in là dell'obbiettivo della recensione. Accanto a questi argomenti, propongono però alcune obiezioni che non sono completamente ingiustificate come, per esempio, il postulato secondo il quale tutte le vere leggi della natura devono potersi esprimere mediante relazioni covarianti.

Secondo l'autore della recensione, i libro non può essere raccomandato come una lettura interessante ed istruttiva, e presuppone tra l'altro la conoscenza del volume di Analisi vettoriale di Burali-Forti e Marcolongo.

No si può poi prendere tutto ciò che presenta come esatto: non è vera in generale, secondo Rainich, la dimostrazione presentata a p. 168 secondo la quale due spazi (di dimensione maggiore di due) con la stessa metrica si possono ottenere l'uno dall'altro tramite una traslazione o una simmetria nello spazio in cui sono contenuti.

La conclusione seppure lapidaria: «On the whole, it is to be regretted that such a book has been published», ripropone la tristezza con la quale si apriva la recensione: è un peccato che il libro abbia visto la luce, non tanto perché contribuisce ad aumentare la confusione esistente intorno alla teoria della relatività (in realtà in modo appena percettibile dato il grande numero di libri e 'pamphets' ricchi di argomenti contrari alla teoria, più accessibili al grande pubblico perché non così pieni di formule), ma

> «It is more to be regretted that some sound ideas and a little sound criticism have been buried among things of doubtful value. But most of all it is to be regretted that it actually may hamper the spreading of the method of direct geometrical analysis in general, and vector analysis in particular.»[78]

[78]Cfr. Rainich, George Yuri, «Reviews: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *The American Mathematical Monthly*, 33, 10 (1926), 515-517, 517.

6.5 Oltre l'*Espaces Courbes*

6.5.1 *Analisi vettoriale generale.* II (1930)

Nel 1930 si pubblica il volume *Analisi vettoriale generale*[79] nel quale Boggio scrive la seconda parte relativa agli spazi curvi che si ricollega agli sviluppi all'*Espaces Courbes*.

Abbiamo deciso di prendere in considerazione alcuni passaggi della seconda parte del volume *Analisi vettoriale generale* perché pensiamo rendono più chiari alcuni concetti che non sono completamente esplicitati nell'*Espaces Courbes*.

Il primo capitolo della seconda parte, scritta da Boggio, si apre con spazi euclidei a più dimensioni, per trattare poi vettori e omografie vettoriali di S_n. L'autore introduce le coordinate cartesiane del vettore u scritto come combinazione lineare di n vettori $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ che formano un sistema unitario ortogonale. Boggio, dopo aver definito l'omografie vettoriale di S_n come l'«operatore lineare che trasforma vettori in vettori» che verifica quindi le proprietà $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ e $\alpha(m\boldsymbol{u}) = m\alpha\boldsymbol{u}$, indica che una omografia è determinata da n vettori $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ linearmente indipendenti se se ne conoscono i corrispondenti $\alpha\boldsymbol{u}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{u}_n$. Si introduce la matrice dell'omografia nel modo seguente:

> «In particolare se si esprime la $\boldsymbol{u}$ mediante la (3) $[\boldsymbol{u} = x_1\boldsymbol{i}_1, \ldots, x_n\boldsymbol{i}_n,$ con $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n]$
>
> $$\alpha\boldsymbol{u} = x_1\alpha\boldsymbol{i}_1, \ldots, x_n\alpha\boldsymbol{i}_n; \tag{5}$$
>
> poiché i vettori $\alpha\boldsymbol{i}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{i}_n$ sono vettori di S_n possiamo rappresentarli con formule analoghe alla (3) cioè
>
> $$\begin{cases} \alpha\boldsymbol{i}_1 = a_{11}\boldsymbol{i}_1 + a_{12}\boldsymbol{i}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{i}_n \\ \alpha\boldsymbol{i}_2 = a_{21}\boldsymbol{i}_1 + a_{22}\boldsymbol{i}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{i}_n \\ \vdots \\ \alpha\boldsymbol{i}_n = a_{n1}\boldsymbol{i}_1 + a_{n2}\boldsymbol{i}_2 + \cdots + a_{nn}\boldsymbol{i}_n \end{cases}$$
>
> ove a_{rs} sono numeri ben determinati dati da $a_{rs} = \boldsymbol{i}_s \times \alpha\boldsymbol{i}_r$. Mediante i coefficienti si può formare la matrice
>
> $$\left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{matrix} \right\}$$

[79] BURGATTI, Pietro, BOGGIO, Tommaso & BURALI-FORTI, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930.

che può chiamarsi matrice dell'omografia α, rispetto al sistema unitario ortogonale considerato.»

Boggio insiste sul fatto che tale matrice non è un elemento *intrinseco* dell'omografia perché dipende da un sistema unitario ortogonale di riferimento e dichiara in conseguenza che non ne farà mai uso.

Cita poi la pagina 7 del *Gruppentheorie und Quantenmechanik*[80] di H. Weyl dove le omografie sono chiamate «Lineare Abbildungen» e commenta:

> «Nella modernissima Fisica dei *quanta* risulta molto importante la teoria delle omografie (anche in spazi ad infinite dimensioni), che perciò è ora studiata da molti autori attraverso il simbolismo ingombrante, inadatto e per nulla geometrico, né intrinseco, delle matrici; mediante le omografie vettoriali, le formule risultano enormemente più semplici, espressive, di per loro natura invariantive, e si ha inoltre il grande vantaggio di operare *direttamente* sugli enti geometrici o meccanici che compaiono nel problema, senza ricorrere ad intermediari di sorta.»[81]

Riportiamo per esteso il paragrafo del libro di Weyl nel quale si introducono le *Lineare Abbildungen* perché lo consideriamo fondamentale per l'interpretazione delle omografie. H. Weyl introduce «le corrispondenze lineari» come un modo alternativo (trasformazione attiva) di interpretare in uno spazio affine la trasformazione da una base ad un'altra ed il relativo cambiamento delle componenti di un vettore (trasformazione passiva)[82]:

> «Der Übergang von einem Koordinatensystem $\mathfrak{e}_i$ zu einem andern $\mathfrak{e}'_i$ wird dadurch geschildert, daß man die neuen Grundvektoren $\mathfrak{e}'_i$ im alten Koordinatensystem angibt:

$$\mathfrak{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathfrak{e}_i.$$

[80] Weyl, Hermann, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig, Hirzel, 1928, 7-8.

[81] Cfr. Burgatti, Pietro, Boggio, Tommaso & Burali-Forti, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930, 140.

[82] Le omografie corrispondono quindi alle trasformazioni attive. E. A. Giannetto aveva già sottolineato questo aspetto in: Giannetto, Enrico Antonio, «Le trasformazioni di Lorentz-Poincaré-Marcolongo», *Atti del LXXXV Congresso Nazionale di SIF, Pavia*, in corso di stampa (1999), s.p, in relazione con il contributo di Marcolongo allo studio della relatività ristretta dal punto di vista del calcolo vettoriale assoluto, in particolare per quanto riguarda lo studio delle trasformazioni che chiama di Lorentz-Poincaré-Marcolongo.

Sind x_i, x'_i die Komponenten desselben willkürlichen Vektors $\mathfrak{r}$ im alten und im neuen Koordinatensystem:

$$\mathfrak{r} = \sum_i x_i \mathfrak{e}_i = \sum_k x'_k \mathfrak{e}'_k,$$

so gelten, wie daraus hervorgeht, die Transformationsformeln

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_i. \qquad (4)$$

Die Forderung, daß die Grundvektoren $\mathfrak{e}'_k$ wie die $\mathfrak{e}_i$ voneinander linear unabhängig sein sollen, drückt sich arithmetisch dadurch aus, dass die Determinante der a_{ik} von 0 verschieden ist. Die Komponenten mehrerer Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{h}, \ldots$ im Raum $\mathfrak{R}$ erfahren beim Übergang zu einem neuen Koordinatensystem die gleiche Transformation, man sagt: *sie transformieren sich kogredient.*

§Lineare Abbildungen. Matrizenkalkül.

Man weiß, daß die Formeln (4) noch in anderer Weise gedeutet werden können: als der Ausdruck einer linearen oder affinen Abbildung des Raumes auf sich selbst. Doch ist es zu diesem Zweck bequemer, die gestrichenen und ungestrichenen Koordinaten zu vertauschen. Bei Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems e_i wird durch die Beziehungen

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k. \qquad (5)$$

dem willkürlichen Vektor $\mathfrak{r}$ mit den Komponenten x_i ein Vektor $\mathfrak{r}'$ mit den Komponenten x'_i zugeordnet; diese *Abbildung* $A : \mathfrak{r} \to \mathfrak{r}'$ des Raumes $\mathfrak{R}$ auf sich selbst kann als eine *lineare* durch die beiden folgenden Aussagen gekennzeichnet werden: Wenn die Vektoren $\mathfrak{r}, \mathfrak{h}$ durch die Abbildung in $\mathfrak{r}', \mathfrak{h}'$ übergehen, so $a\mathfrak{r}$ in $a\mathfrak{r}'$ und $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$ in $\mathfrak{r}' + \mathfrak{h}'$. Die Abbildung läßt also alle affinen Beziehungen ungeändert ; ihre ausgezeichnete Stellung im Rahmen der affinen Geometrie ist danach klar. Ist A eine den Forderungen genügende Abbildung, durch welche der Grundvektor $\mathfrak{e}_k$ übergeführt wird in

$$\mathfrak{e}'_k = \sum_i a_{ik} \mathfrak{e}_i, \qquad (6)$$

so geht zufolge der Forderungen die lineare Kombination

$$\mathfrak{r} = x_1\mathfrak{e}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{e}_n \quad \text{über in} \quad \mathfrak{r}' = x_1\mathfrak{e}'_1 + \cdots + x_n\mathfrak{e}'_n.$$

> Setzt man (6) ein, so erkennt man, daß der Bildvektor $\mathfrak{r}'$ im Koordinatensystem der $\mathfrak{e}_i$ die Komponenten x'_i besitzt, welche nach (5) mit den Komponenten x_i von $\mathfrak{r}$ verbunden sind.»[83]

6.5.2 Recensione di Enea Bortolotti

E. Bortolotti pubblica la sua recensione del secondo volume dell'*Analisi Vettoriale Generale* nel 1930.[84]

Bortolotti commenta:

> «È sperabile che la lettura di quest'opera possa far cadere quelle ingiuste prevenzioni, tutt'ora diffuse, contro i metodi assoluti in Geometria, non a torto dagli AA stesse lamentate.»[85]

Infatti Gino Loria che in una recensione del *Projective Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrehnung dargestellt* di Hermann Grassmann pubblicata su *Il Bollettino di Matematica* del Novembre 1928 aveva scritto:

> «L'autore –notiamolo a sua lode– pur essendo un convinto estimatore dell'*Ausdehnungslehre*, non è animato da quell'intransigenza che caratterizza i fanatici ciechi; infatti nella sua opera, oltre i vettori, si trovano applicati anche i vari sistemi di coordinate a tutti noti e spesso anche il puro ragionamento geomerico»[86]

Burgatti, Boggio e Burali-Forti nell'introduzione del loro volume rispondono a G. Loria:

[83]Una traduzione in inglesesi può trovare in Weyl, Hermann, *The theory of groups and quantum mechanics*, New York, Dover, 1950, 4-6. Il volume è la traduzione integrale dell'edizione tedesca del 1931.

[84]Cfr. Bortolotti, Enea, «Recensione di: P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti: *Geometria differenziale*. (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930: pagg. IX-338.», *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, IX (1930), 295-302.

[85]Bortolotti, Enea, «Recensione di: P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti: *Geometria differenziale.* (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930: pagg. IX-338.», *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, IX (1930), 295-302, 298.

[86]Cfr. G. L., «*Projective Geometrie der Ebene, unter Benutzung der Punktrehnung dargestellt* di Hermann Grassmann», Il Bollettino di Matematica, VII (1928), LVII.

> «È strano che proprio ai geometri debba ripugnare l'uso di questi metodi. G.L. [...] chiama: «fanatici ciechi» coloro che sistematicamente si servono di enti assoluti e, pure sistematicamente, non fanno uso di coordinate. Ergo «fanatici ciechi», anche coloro che fanno uso *soltanto* di coordinate; con questa differenza: quelli, oltre agli *enti geometrici assoluti*, hanno a disposizione anche le coordinate di qualunque specie, che possono ottenere in modo geometrico e rapido; questi devono contentarsi delle coordinate, facendo sparire la geometria.»[87]

Nel paragrafo relativo alle iperomografie di S_n dell'*Analisi vettoriale generale* in nota compare il seguente commento di Boggio a proposito di omografie e tensori:

> «Molti autori tedeschi chiamano tensore "tensore di ordine r" ciò che noi chiamiamo da molti anni "omografie di ordine $r-1$"; la denominazione tedesca è anche seguita (chissà perché) da vari autori italiani.»[88]

E. Bortolotti cominciando l'analisi del contributo di Boggio osserva a questo proposito:

> «Veniamo alla Parte II, redatta dal prof. Boggio. Questo interessante tentativo di costruzione assoluta di una geometria riemanniana è basato, come già accennai, sul calcolo delle omografie (d'ordine qualunque) negli spazi a più dimensioni, che qui viene sviluppato, dopo un accenno rapido (un po' alla buona) alla nozione di spazio euclideo n-dimensionale, nel Cap. I (vettori e omografie in spazi euclidei). L'omografia d'ordine r (≥ 0) è un aspetto particolare di quelle'ente che noi (intendo io e i più di quanti ora si occupano, in Italia e fuori, di calcolo assoluto e di geometria differenziale) siamo ormai abituati a chiamare *tensore*.
>
> Un tensore di ordine $r+1$ nella geometria metrica può manifestamente considerarsi, e anzi in $r+1$ diversi modi come un operatore

[87]Cfr. Burgatti, Pietro, Boggio, Tommaso & Burali-Forti, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930, IX.

[88]Cfr. Burgatti, Pietro, Boggio, Tommaso & Burali-Forti, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930, 150.

> fra $r-$ple ordinate di vettori e vettori, in questo senso viene detto una omografia di ordine r, e come tale è suscettibile di una costruzione diretta e assoluta senza alcun ricorso a riferimenti.
>
> Si può dire che l'omografia è un tensore nel quale uno degli indici ha un comportamento privilegiato rispetto agli altri. Questo inconveniente si potrebbe evitare introducendo (come fa più o meno esplicitamente qualche autore di calcolo tensoriale [Cita Von Laue] il tensore di ordine $r+1$ come operatore fra $r+1-$ple ordinate di vettori e scalari.
>
> Ma l'inconveniente non esiste per l'autore (Boggio) che non preoccupandosi delle relazioni col calcolo di Ricci procede indipendentemente da ogni rappresentazione scalare.
>
> Al passaggio dall'una all'altra omografia corrispondente allo stesso tensore egli provvede in sostanza mediante l'operazione K opportunamente combinata con k e k^*.»[89]

Esiste però una certa coesistenza, che oseremo definire armonica, fra omografie e tensori nel volume di B. Finzi e M. Pastori *Calcolo tensoriale e applicazioni* pubblicato nel 1949.[90]

Sull'omografia di Riemann sviluppata nel capitolo III dell'*Analisi vetotriale* in cui Boggio considera alcuni concetti esposti in Note Lincee degli anni precedenti, Bortolotti dice:

> «L'A stabilisce anzitutto la nozione di differenziale superficiale su una V_n, quale componente secondo V_n del differenziale calcolato in uno spazio ambiente euclideo. Naturalmente ciò equivale a introdurre la nozione di parallelismo di Levi-Civita e io penso che la trattazione dell'autore guadagnerebbe forse in chiarezza ed

[89] Bortolotti, Enea, «Recensione di: P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti: *Geometria differenziale.* (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930: pagg. IX-338.», *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, IX (1930), 295-302, 298-299.

[90] Cfr. Finzi, Bruno & Pastori, Maria, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli, 1949. Il libro è costituito infatti da 10 capitoli, in questo ordine: campi vettoriali, tensori e algebra tensoriale, omografie vettoriali, campi tensoriali negli spazi euclidei, campi tensoriali negli spazi non euclidei, geometria della superficie, geometria degli spazi di Riemann, meccanica dei continui deformabili, campo elettromagnetico e teoria della relatività. Il capitolo III omografie vettoriali si apre con i paragrafi: omografia corrispondente ad un dato tensore e tensore corrispondente ad una data omografia. Nel capitolo IV, relativo ai campi tensoriali negli spazi euclidei, si prende in considerazione il differenziale di un vettore e di un tensore e la derivata rispetto al punto, interpretati tramite la derivazione covariante.

> espressività se egli facesse uso di questo equivalente geometrico del suo operatore differenziale, anziché rimandare lo studio del parallelismo all'ultimo capitolo (p. 256 e seg.) come una «applicazione» della teoria prima svolta! Lo studio del differenziale superficiale è svolto abbastanza ampiamente nel capitolo III: in particolare ne risulta, quale espressione della non commutabilità dei differenziali superficiali secondi, l'omografia di Riemann; cioè il tensore di curvatura riemanniano (come nella trattazione di Schouten e Struik). Trattandosi come è noto di un tensore del 4° ordine, la corrispondente omografia è del 3° ordine; indubbiamente essa è più espressiva, e anche le dimostrazioni della classiche quattro identità del tensore di curvatura riescono, nell'attuale trattazione, di notevole semplicità.»[91]

Il differenziale superficiale di un vettore era stato introdotto da Boggio nel seguente modo:

> «Consideriamo una varietà V_n ad n dimensioni, descritta da un punto generico Q, e immersa in uno spazio euclideo S_N, avente un numero n di dimensioni sufficientemente grande. Supponiamo che nel punto generico Q della V_n esista uno spazio euclideo ben determinato, S_n, ad n dimensioni (immerso in S_N) *tangente* alla V_n. Se $\boldsymbol{u}$ è un vettore, funzione del punto Q, tale che la retta $Q\boldsymbol{u}$ sia tangente a V_n in Q, diremo brevemente che il vettore $\boldsymbol{u}$ è tangente alla V_n in Q od anche che è un *vettore tangenziale*. Se ora diamo al punto Q uno spostamento infinitesimo qualunque dQ sulla V_n, il vettore $\boldsymbol{u}$ subirà un incremento pure infinitesimo, $d\boldsymbol{u}$, ed è chiaro che questo vettore non risulta, in generale, più tangente alla V_n, ma è un vettore di S_N. In ciò che segue, ci è indispensabile considerare la *componente tangenziale* di tale vettore, cioè la sua proiezione (ortogonale) sullo spazio S_n tangente alla V_n in Q; questa componente la indicheremo con $(d\boldsymbol{u})_v$, e risulterà perciò definita dalla condizione:
>
> $$[(d\boldsymbol{u})_v - d\boldsymbol{u}] \times a = 0$$

[91] Bortolotti, Enea, «Recensione di: P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti: *Geometria differenziale.* (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930: pagg. IX-338.», *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, IX (1930), 295-302, 300.

dove a è un vettore qualunque tangente alla V_n in Q.»[92]

Riportiamo ancora un altro commento molto significativo di Bortolotti in relazione ai coefficienti di Ricci e alla loro traduzione omografica:

> «L'affermazione (p. 276) [del contributo di Boggio] che le γ_{ijk} costituiscono un tensore triplo va intesa in questo senso: si tratta di un tensore non per *tutte* le trasformazioni lineari ortogonali sui campi di vettori unitari a_r che definiscono l'n-pla ma per le sole trasformazioni ortogonali a coefficienti costanti: questo è il caso particolare che si è presentato in un gruppo di ricerche recenti, a cui appartiene il lavoro del Levi-Civita che l'A cita alla seguente pag. 277.»[93]

A nostro avviso, in realtà, Boggio non ha capito il calcolo differenziale assoluto e questa sua affermazione è uno fra gli svariati contributi nei quali l'autore traduce i contributi di T. Levi-Civita al formalismo del calcolo vettoriale assoluto senza coordinate.[94]

Bortolotti chiude il suo intervento riguardante il contributo di T. Boggio dicendo che quella che l'autore chiama l'omografia di Christoffel, tale omografia non è né più espressiva né più semplice di quella ottenuta con il corrispondente simbolo.

> «Non v'è che un modo di rendere relativamente espressivi i simboli $\left\{ \begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right\}$ ed è (credo) di considerarli come i coefficienti degli pfaffiani $\omega_r^t = \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ t \end{matrix} \right\} du^s$ che definiscono l'isomeria vettoriale infinitesimale $dv^t + \omega_r^t v^r = 0$ traducente il trasporto parallelo di Levi-Civita.»[95]

[92]Cfr. Burgatti, Pietro, Boggio, Tommaso & Burali-Forti, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930, 177. Finzi e Pastori dimostrano che il relativo tensore doppio derivato superficiale di un vettore coincide con la derivata covariante sulla superficie per un vettore. Cfr. Finzi, Bruno & Pastori, Maria, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli, 1949, 169.

[93]Bortolotti, Enea, «Recensione di: P. Burgatti, T. Boggio, C. Burali-Forti: *Geometria differenziale.* (Volume II dell'*Analisi Vettoriale Generale e Applicazioni*). Bologna, Zanichelli, 1930: pagg. IX-338.», *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, IX (1930), 295-302, 301.

[94]Cfr. Note Lincee di Boggio e anche ad esempio di Cataldo Agostinelli e Giacinta Andruetto.

[95]Ibidem nota precedente.

6.6 Conclusione

Il sesto capitolo affronta lo studio del volume *Espaces Courbes* e la critica della relatività.

Dopo aver discusso in dettaglio alcuni particolari tecnici del volume, abbiamo concluso che la covarianza considerata dagli autori non è in realtà la covarianza delle equazioni ma indica i tensori misti di vario tipo. Gli autori enunciano alcune considerazioni che apparentemente sembrano riallacciarsi con delle critiche fondate della Relatività ma vivono nel mondo della meccanica classica e non riescono a superare questa visione nonostante la posizione di Marcolongo che conosce i due formalismi e la pazienza di Levi-Civita sempre disponibile a dare spiegazioni e consigli, e a presentare i lavori di Boggio all'Accademia dei Lincei. Burali-Forti e Boggio si soffermano sulla generalizzazione del linguaggio vettoriale omografico applicato agli spazi euclidei n-dimensionali e si muovono nella direzione della definizione sintetica dei tensori come applicazioni multilineari.

Il volume riceve critiche molto severe da parte di alcuni studiosi della Relatività che però apprezzano il lavoro degli autori, mostrando per loro grande considerazione, vedono di buon occhio il loro tentativo di creare un formalismo sintetico seguendo l'idea enunciata da Leibniz, e si rammaricano che un approccio così «violento» abbia potuto in certi casi rifiuto per le idee interessanti comunque contenute nel volume e in generale per i lavori degli autori in altri campi.

L'*Espaces Courbes* apre delle prospettive di lavoro futuro molto interessanti sulla scia delle pubblicazioni degli anni trenta di M. Manarini, U. Cisotti, B. Finzi e M. Pastori.

6.7 Appendice: Indice del *Espaces Courbes*

La prima parte intitolata: *Vecteurs et homographies générales dans l'S_n* è costituita da cinque capitoli:

La seconda parte: *Espaces courbes et relativité*, considera:

Si riportano anche cinque note:

Capitolo 7

Conclusione

Nel primo capitolo che riguarda la biografia si è cercato di dare una visione d'insieme di tutti i contributi che sono stati fatti su C. Burali-Forti. Non è stato conservato praticamente nessun materiale di archivio riguardante Burali-Forti, almeno fino allo stato attuale delle nostre ricerche, per cui la ricostruzione è dovuta avvenire in gran parte tramite informazioni parziali contenute nella corrispondenza a terzi che si trova nella bibliografia consultata. Alcune informazioni su eventuali lettere conservate non sono poi risultate contrastabili.

Burali-Forti si è rivelato un oggetto di studio interessante che anche non collocandosi in prima fila della ricerca matematica permette di chiarire alcuni aspetti che altrimenti non sarebbero venuti alla luce. Lavora in una struttura accademica: l'*Accademia Militare* di Torino ed è in contatto con il modo universitario tramite i suoi collaboratori, in particolar modo R. Marcolongo e T. Boggio. Partecipa attivamente all'attività di ricerca ed è generalmente apprezzato dagli studiosi sia nazionali che internazionali, nonostante il suo carattere difficile e la sua intransigenza dimostrata a più riprese e senza alcun tipo di complesso.

Per quanto riguarda le notazioni vettoriali vediamo che non si arriva veramente ad un accordo. Anche se Burali-Forti e Marcolongo portano avanti un lavoro interessante di revisione critica e storica dei contenuti in realtà gli autori, anche se arrivano a pubblicare su *Isis* un riassunto delle loro proposte non si arriva ad una notazione unica. Forse anche in questo caso l'intransigenza di Burali-Forti ha causato non pochi problemi. Il più degli autori rimane legato alle sue notazioni, con interessi nazionali molto marcati. Le scuole dei seguaci di Hamilton, la scuola dell'Enciclopedia tedesca, quella dei vettorialisti italiano, seguono le loro preferenze.

Per quanto riguarda il quarto e il quinto capitolo abbiamo discusso in dettaglio la genesi e il dibattito sulle notazioni posizionando l'obbiettivo dal contributo del calcolo vettoriale italiano. Abbiamo analizzato l'evoluzione delle proposte tramite lo studio comparativo delle diverse edizioni dei volumi pubblicati dagli autori, concentrando l'attenzione sul contributo teorico che è stato quello fondamentalmente opera di Burali-Forti e tralasciando le applicazioni, che avrebbero condotto ad un'analisi troppo estesa e particolareggiata dei contributi di Marcolongo e degli altri membri della scuola di Peano che potrebbe essere affrontato come progetto di lavoro futuro.

Il quarto capitolo affronta lo studio del volume *Espaces Courbes* e la critica della relatività.

Dopo l'analisi di Pizzocchero il nostro è il primo tentativo di discutere in dettaglio i particolari tecnici del volume siamo arrivati ad alcune considerazioni come il fatto che la covarianza considerata dagli autori non è in realtà la covarianza delle equazioni ma quella dei tensori misti di vario tipo. Gli autori enunciano alcune considerazioni che apparentemente sembrano riallacciarsi con delle critiche fondate della relatività ma vivono nel mondo della meccanica classica e non riescono a superare questa visione nonostante gli sforzi di Marcolongo e la pazienza di Levi-Civita.

Il volume riceve critiche molto severe da parte di alcuni studiosi della Relatività che però apprezzano il lavoro degli autori e vedono di buon occhio il loro tentativo di creare un formalismo sintetico seguendo l'idea enunciata da Leibniz. Il lavoro apre delle prospettive di lavoro molto interessanti sulla scia degli sviluppi di Manarini, Cisotti, Finzi e Pastori che lavorano in un formalismo che armonizza quello del calcolo differenziale assoluto e quello degli autori.

Capitolo 8

Iconografia

Figura 8.1: Buste di alcune lettere indirizzate da Cesare Burali-Forte alla fidanzata, poi moglie, Gemma Viviani, conservate dalla famiglia Burali-Forti.

Figura 8.1: Cesare Burali-Forti, Gemma Viviani e il figlio Umberto nel 1892 e nel 1895. Fonte: Archivio privato della famiglia Burali-Forti.

Figura 8.2: Cesare Burali-Forti. Fonte: Archivio privato della famiglia Burali-Forti.

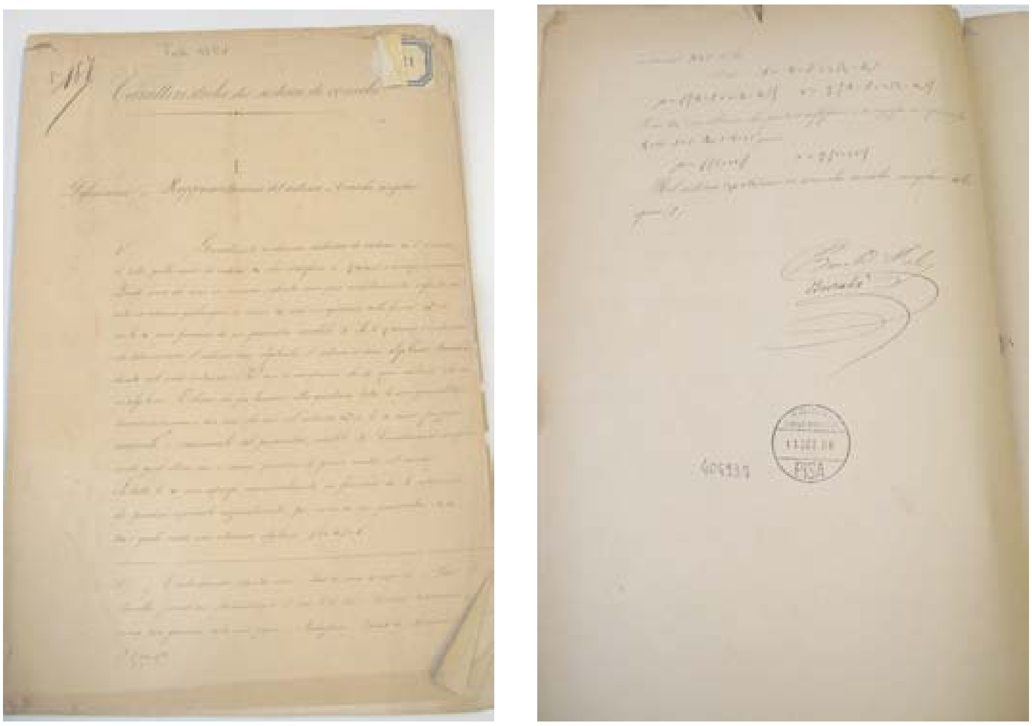


Figura 8.3: Tesi di laurea: «Sulle caratteristiche dei sistemi di coniche». Fonte: Biblioteca Universitaria di Pisa, Fascicolo TESI 5421.

IN NOME DI S. M. UMBERTO I.

PER LA GRAZIA DI DIO E PER VOLONTÀ DELLA NAZIONE

RE D'ITALIA

Noi prof. Emilio Teza, commendatore dell'Ordine della Corona d'Italia, Rettore della regia Università di Pisa;

visto l'attestato finale degli studi percorsi e degli esami sostenuti dal

lo abbiamo proclamato Dottore in

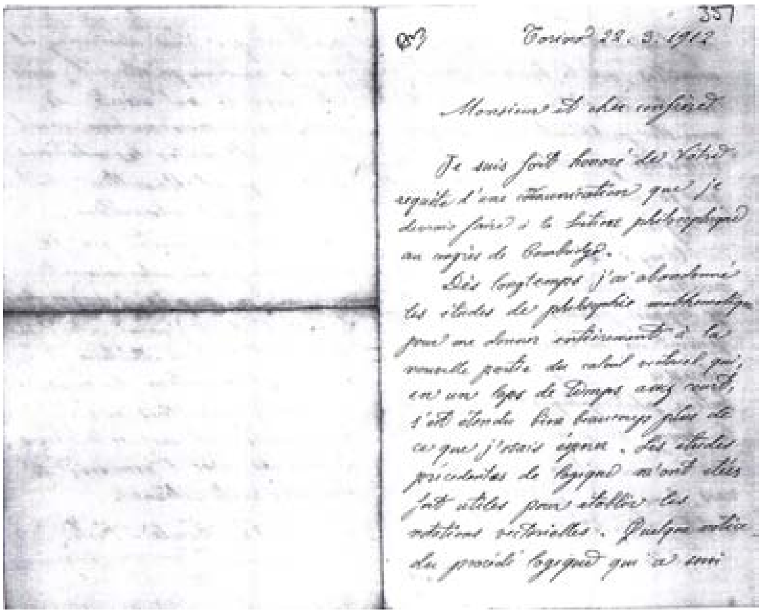
Dato in questa regia Università di Pisa

IL RETTORE

Il Preside della Facoltà

Il Direttore della Segreteria

Figura 8.4: Attestato finale di studi. Diploma di laurea in Matematica. Archivio di Stato di Pisa.



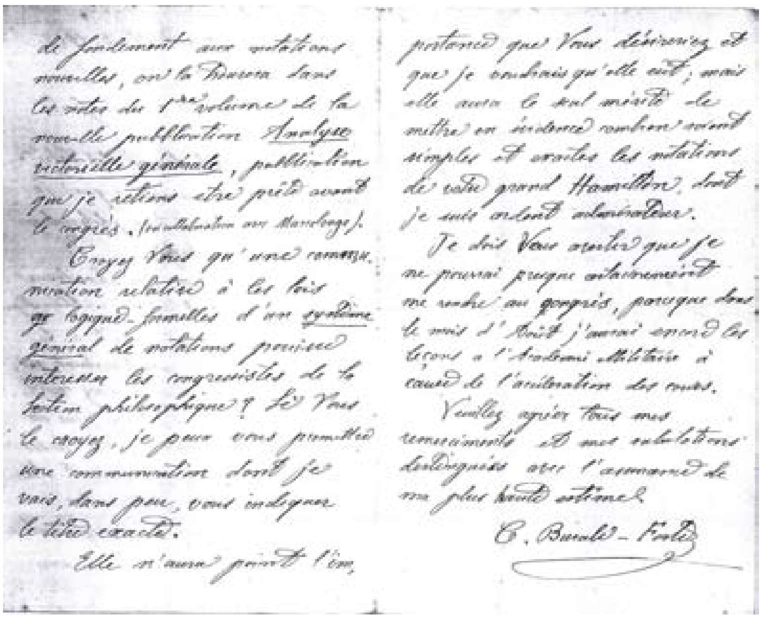
357

83 Torino 22. 3. 1912

Monsieur et cher confrère

Je suis fort honoré de Votre requête d'une communication que je devrais faire à la section philosophique au congrès de Cambridge.

Dès longtemps j'ai abandonné les études de philosophie mathématique pour me donner entièrement à la nouvelle partie du calcul vectoriel qui, en un laps de temps assez court, s'est étendu bien beaucoup plus de ce que j'avais espéré. Les études précédentes de logique m'ont été fort utiles pour établir les notations vectorielles. Quelque notice du procédé logique qui a servi



de fondement aux notations nouvelles, on la trouvera dans les notes du 1er volume de la nouvelle publication Analyse vectorielle générale, publication que je retiens être prête avant le congrès. (in collaboration avec Marcolongo).

Croyez Vous qu'une communication relative à les lois ou logique formelles d'un système général de notations pourrait intéresser les congressistes de la section philosophique? Si Vous le croyez, je peux vous promettre une communication dont je vais, dans peu, vous indiquer le titre exacte.

Elle n'aura point l'importance que Vous désirerez et que je voudrais qu'elle eût; mais elle aura le seul mérite de mettre en évidence combien sont simples et exactes les notations de votre grand Hamilton, dont je suis ardent admirateur.

Je dois Vous avertir que je ne pourrai presque certainement me rendre au congrès, parce que dans le mois d'Août j'aurai encore les leçons à l'Académie Militaire à cause de l'accélération des cours.

Veuillez agréer tous mes remerciements et mes salutations distinguées avec l'assurance de ma plus haute estime.

C. Burali-Forti

Figura 8.5: Lettera di Cesare Burali-Forti a Bertrand Russell (1912). Fonte: The Bertrand Rusell Archive. Mac Master University. Hamilton.

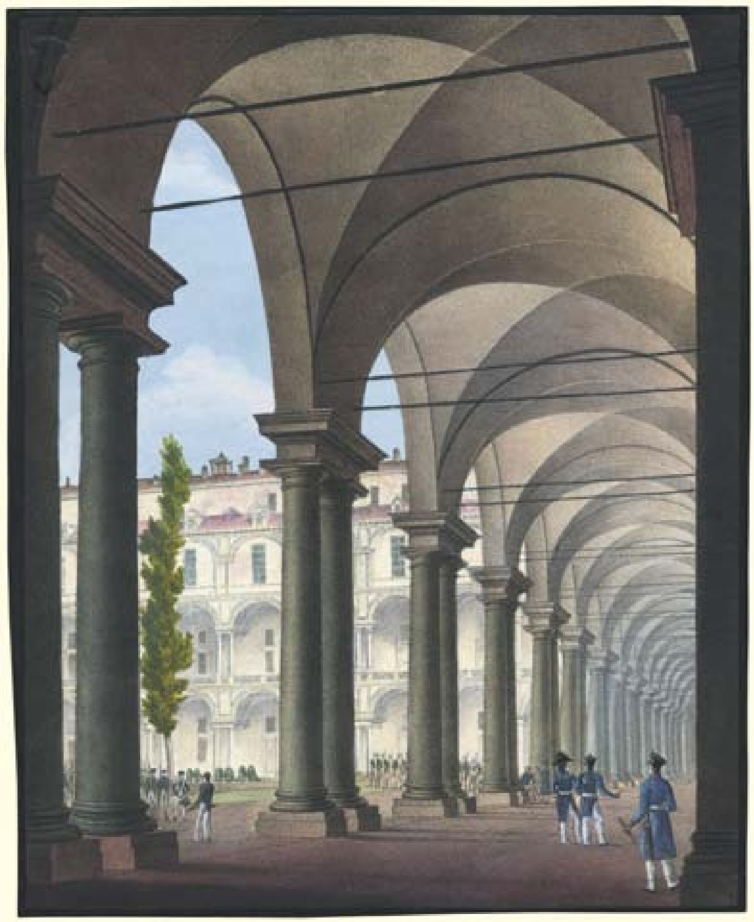


Figura 8.6: Interno dell'Accademia Militare di Torino, 1836. Fonte: Archivio Storico della Città di Torino, Collezione Simeom, D447.

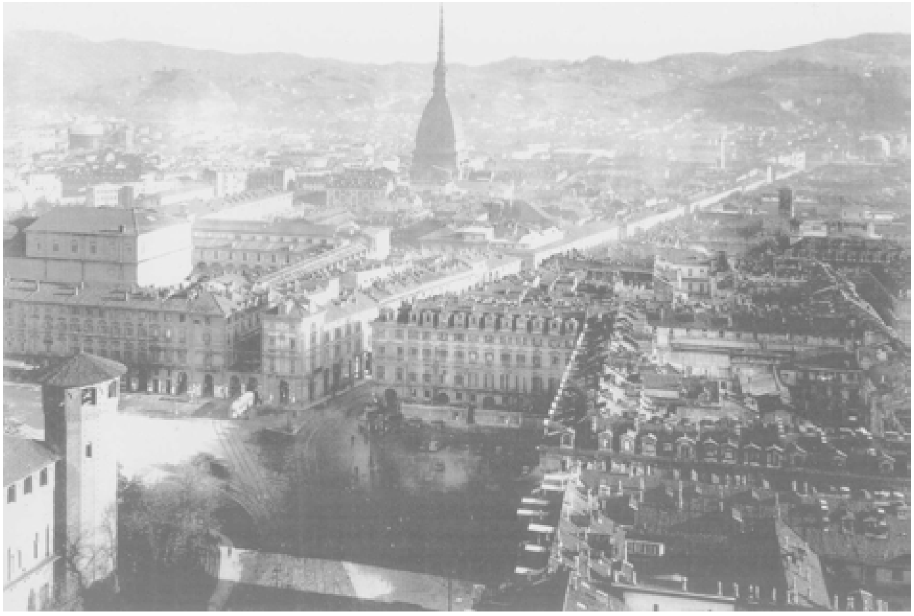


Figura 8.7: Torino. Veduta panoramica dalla Torre Littoria. (Piazza castello e la Mole Antonelliana). Fonte: Fototeca GAM, Torino. N° 437 11380

Figura 8.8: Torino Palazzo dell'Università, Via Po 17, Cortile. Fonte: Fototeca GAM, Torino. N° 1187 58617. Datazione 1925.

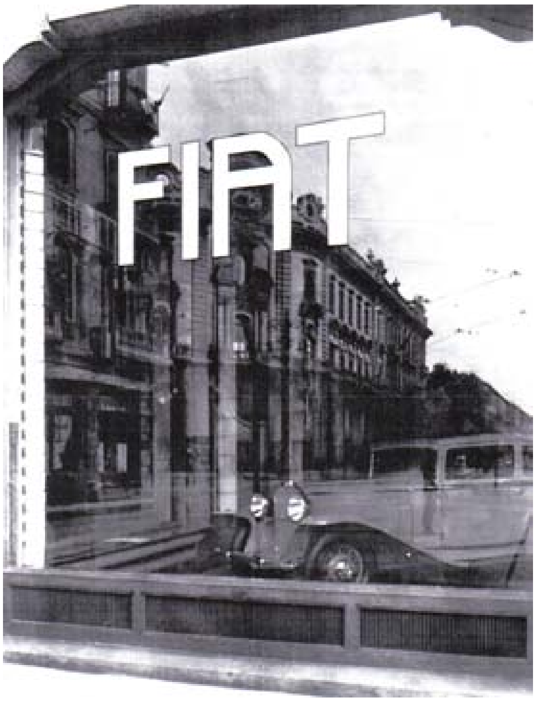


Figura 8.9: Torino, Piazza Solferino. Fonte: Fototeca GAM, Torino. N° 1108 49926. Datazione 1930.

Figura 8.10: Torino, Piazza Carlo Alberto. Carnevale 1926. Fonte: Fototeca GAM, Torino. N° 442 11460.

SOPRA ALCUNI PROBLEMI

DELLE

ASSICURAZIONI SULLA VITA

(SAGGIO CRITICO)

NOTA

DI

CESARE BURALI-FORTI

DOTTORE IN MATEMATICHE

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
1886

ACCADEMIA MILITARE

AMMINISTRAZIONE

Caro Bettazzi —

Mi ha parlato Peano del problema di assicurazioni.

Se vuoi nota, trovi a pag 14 a) (a ...) il problema per $i = 1$ e $s = 0$. La formula (31) (pag 14) ti da la soluzione. — Le A sono definite a pag 5 formula (2), mediante le k che trovi a pag 19, 20. Le v calcolate al n° 16, pag 19 sono i dati che devi dedurre dalla generale tavola di mortalità.

[illegible]

Figura 8.11: Lettera di Cesare Burali-Forti a Rodolfo Bettazzi, ritrovata nella Biblioteca Nazionale Universitaria di Torino, all'interno del saggio *Sopra alcuni problemi di Assicurazioni sulla vita*, 1886, di C. Burali-Forti.

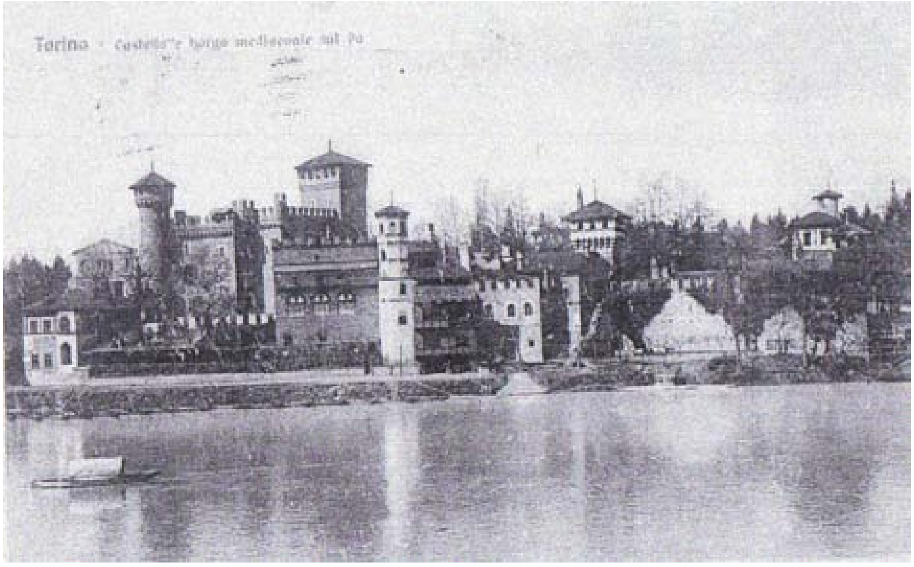


Figura 8.12: Torino. Castello e Borgo Medioevale sul Po. Cartolina illustrata inviata da C. Burali-Forti a T. Levi-Civita. Fonte: Biblioteca dell'Accademia dei Lincei. Fondo Levi-Civita.

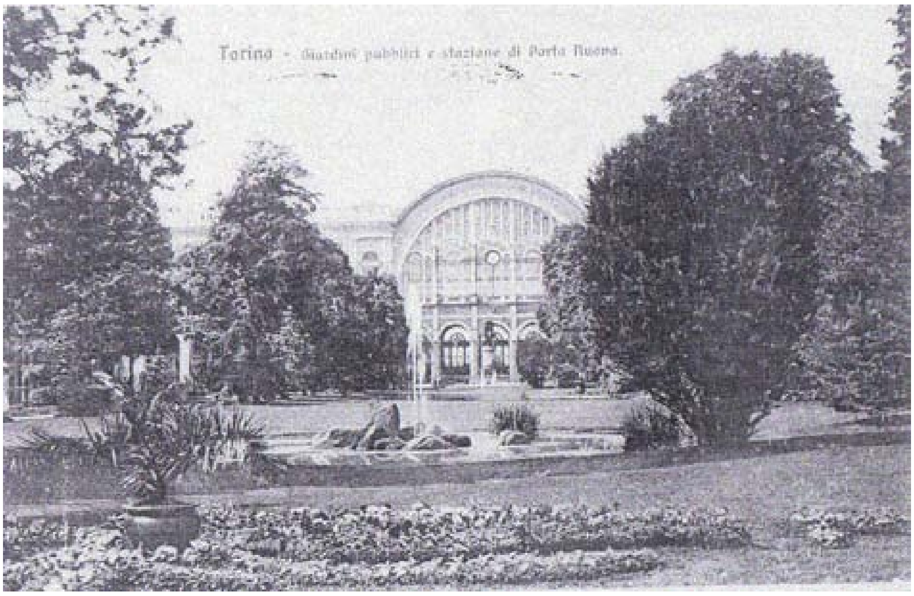
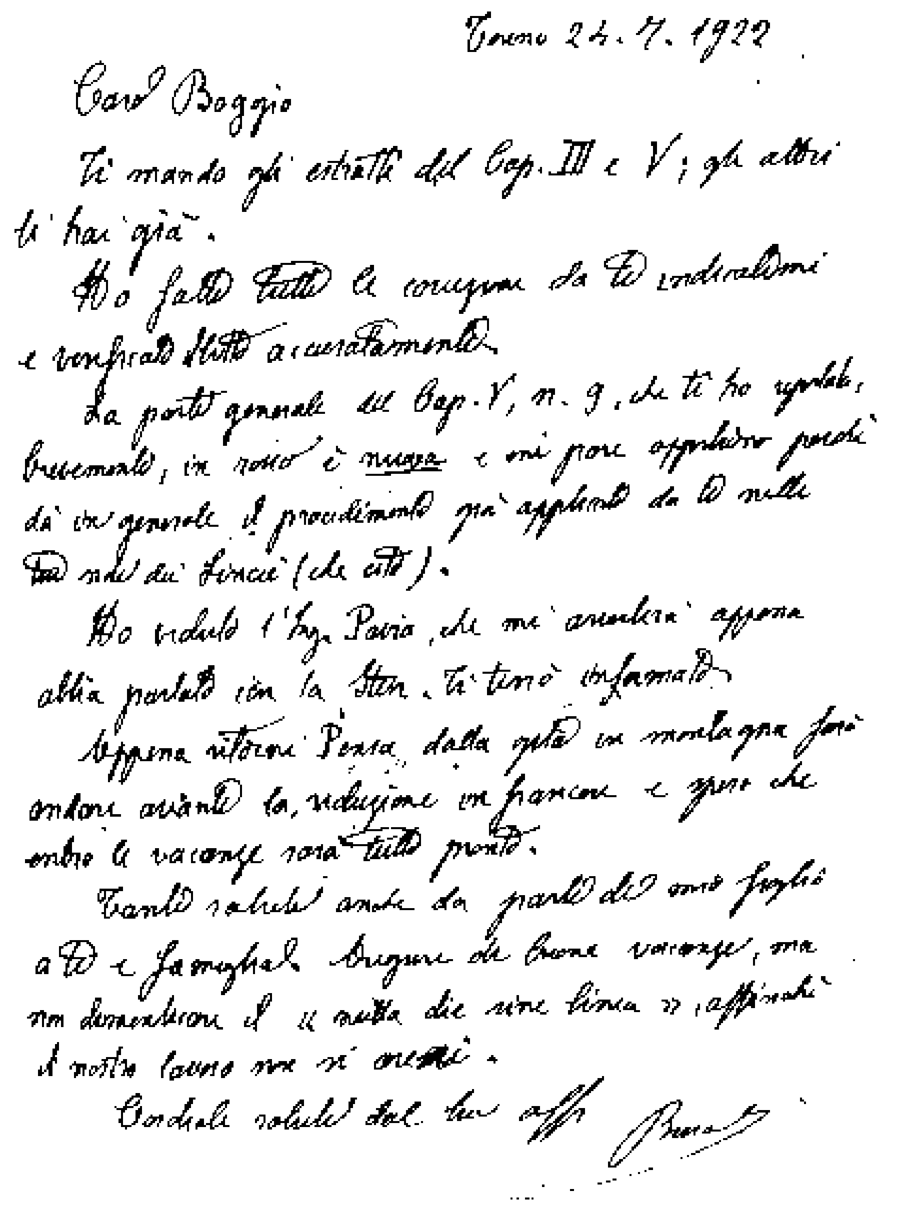


Figura 8.13: Torino. Giardini Pubblici e Stazione di Porta Nuova. Cartolina illustrata inviata da C. Burali-Forti a T. Levi-Civita. Biblioteca dell'Accademia dei Lincei. Fondo Levi-Civita.



Torino 24. 7. 1922

Caro Boggio

Ti mando gli estratti del Cap. III e V; gli altri li hai già.

Ho fatto tutte le correzioni da te indicatemi e verificato tutto accuratamente.

La parte generale del Cap. V, n. 9, che ti ho spiegato brevemente, in rosso è nuova e mi pare opportuno perchè dà in generale il procedimento già applicato da te nelle tue note dei Lincei (che cito).

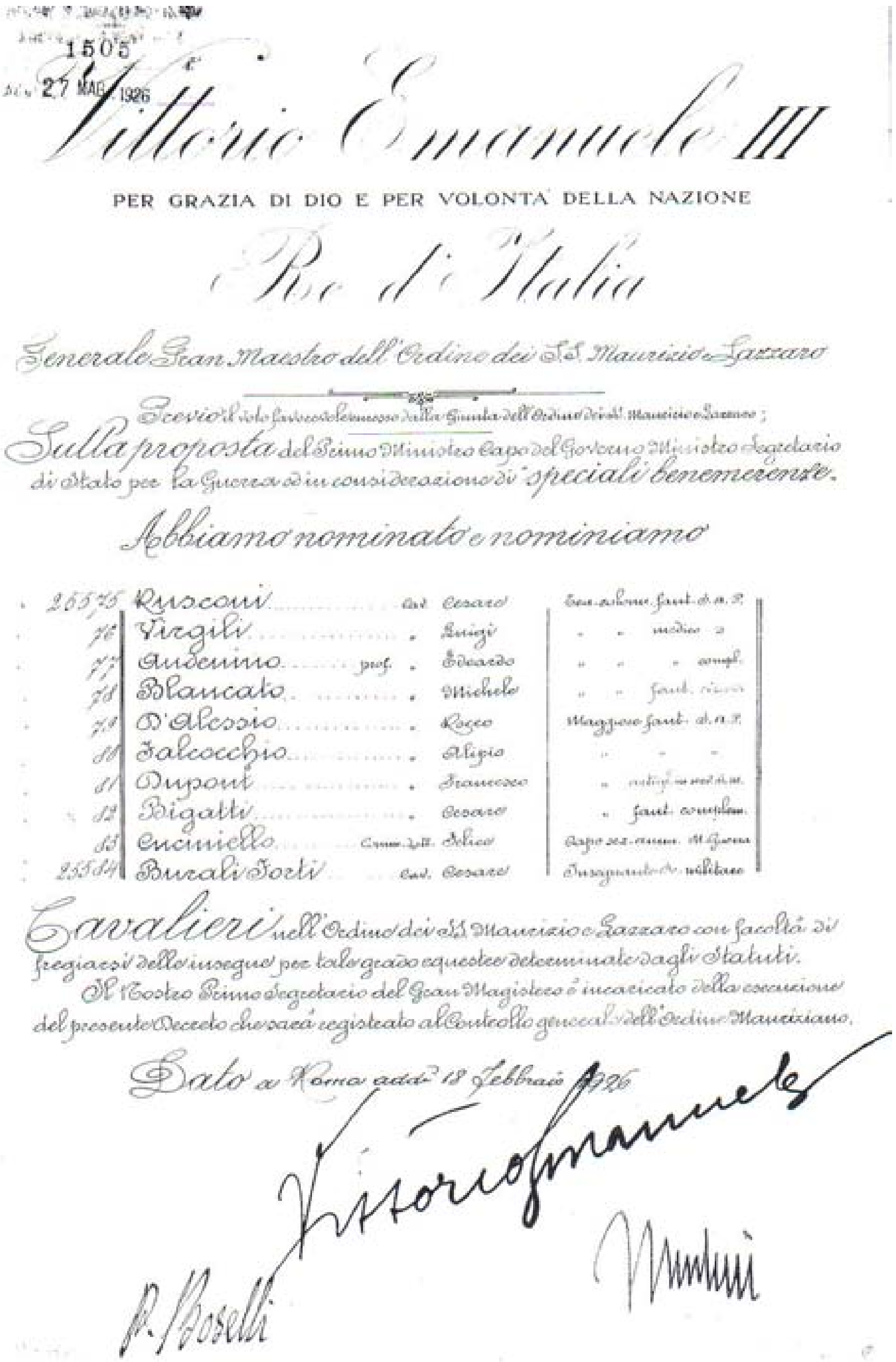
Ho veduto l'Ing. Pavia, che mi avverterà appena abbia parlato con la Sten. Ti terrò informato.

Appena ritorni Peano dalla gita in montagna farò andare avanti la riduzione in francese e spero che entro le vacanze sarà tutto pronto.

Tanti saluti anche da parte del mio figlio a te e famiglia. Auguri di buone vacanze, ma non dimenticare il « nulla die sine linea », affinchè il nostro lavoro non si arresti.

Cordiali saluti dal tuo aff.mo Burali

Figura 8.14: Lettera di Cesare Burali-Forti a Tommaso Boggio, scritta durante il periodo di elaborazione dell'*Espaces Courbes*, nel 1922. Fonte: Biblioteca Speciale di Matematica G. Peano.


1505
27 MAG 1926

Vittorio Emanuele III

PER GRAZIA DI DIO E PER VOLONTA' DELLA NAZIONE

Re d'Italia

Generale Gran Maestro dell'Ordine dei S.S. Maurizio e Lazzaro

Previo il voto favorevole emesso dalla Giunta dell'Ordine dei S.S. Maurizio e Lazzaro;
Sulla proposta del Primo Ministro Capo del Governo Ministro Segretario di Stato per la Guerra ed in considerazione di speciali benemerenze.

Abbiamo nominato e nominiamo

25575	Rusconi	cav.	Cesare	[illegible] fant.
76	Virgili	"	Luigi	" " medico
77	Audenino	prof. "	Edoardo	" " " compl.
78	Biancato	"	Michele	" " fant. [illegible]
79	D'Alessio	"	Rocco	Maggiore fant.
80	Falcocchio	"	Aligio	" " "
81	Dupont	"	Francesco	" [illegible]
82	Bigatti	"	Cesare	" fant. complem.
83	Cuciniello	Comm. dott.	Felice	Capo sez. amm. M. Guerra
25584	Burali Forti	cav.	Cesare	Insegnante di militare

Cavalieri nell'Ordine dei S.S. Maurizio e Lazzaro con facoltà di fregiarsi delle insegne per tale grado equestre determinate dagli Statuti.
Il Nostro Primo Segretario del Gran Magistero è incaricato della esecuzione del presente Decreto che sarà registrato al Controllo generale dell'Ordine Mauriziano.

Dato a Roma addì 18 Febbraio 1926

Vittorio Emanuele

Mussolini

P. Boselli

Figura 8.15: Nomina di C. Burali Forti a cavaliere dell'Ordine dei S.S. Maurizio e Lazzaro. 18 febbraio 1926. Firmata da Vittorio Emanuele, P. Boselli, primo ufficiale dell'Ordine e Mussolini. Fonte: Archivio Storico dell'Ospedale Mauriziano, Torino.

Figura 8.16: Cortile principale. Angolo Archivi di Stato e lato ovest (orologio). Accademia Militare, Torino. Fonte: Archivio storico della Scuola di Applicazione e Arma, Torino.

Figura 8.17: Cortile principale. Colonnato. Accademia Militare, Torino. Fonte: Archivio storico della Scuola di Applicazione e Arma, Torino.

Figura 8.18: Aula di studio del secondo piano. Lato nord. Accademia Militare, Torino. Fonte: Archivio storico della Scuola di Applicazione e Arma, Torino.

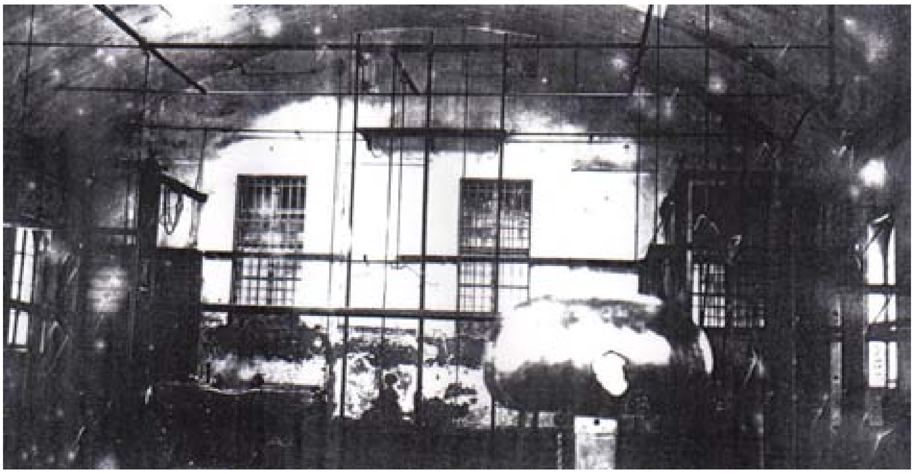


Figura 8.19: Palestra di ginnastica. Accademia Militare, Torino. Fonte: Archivio storico della Scuola di Applicazione e Arma, Torino.

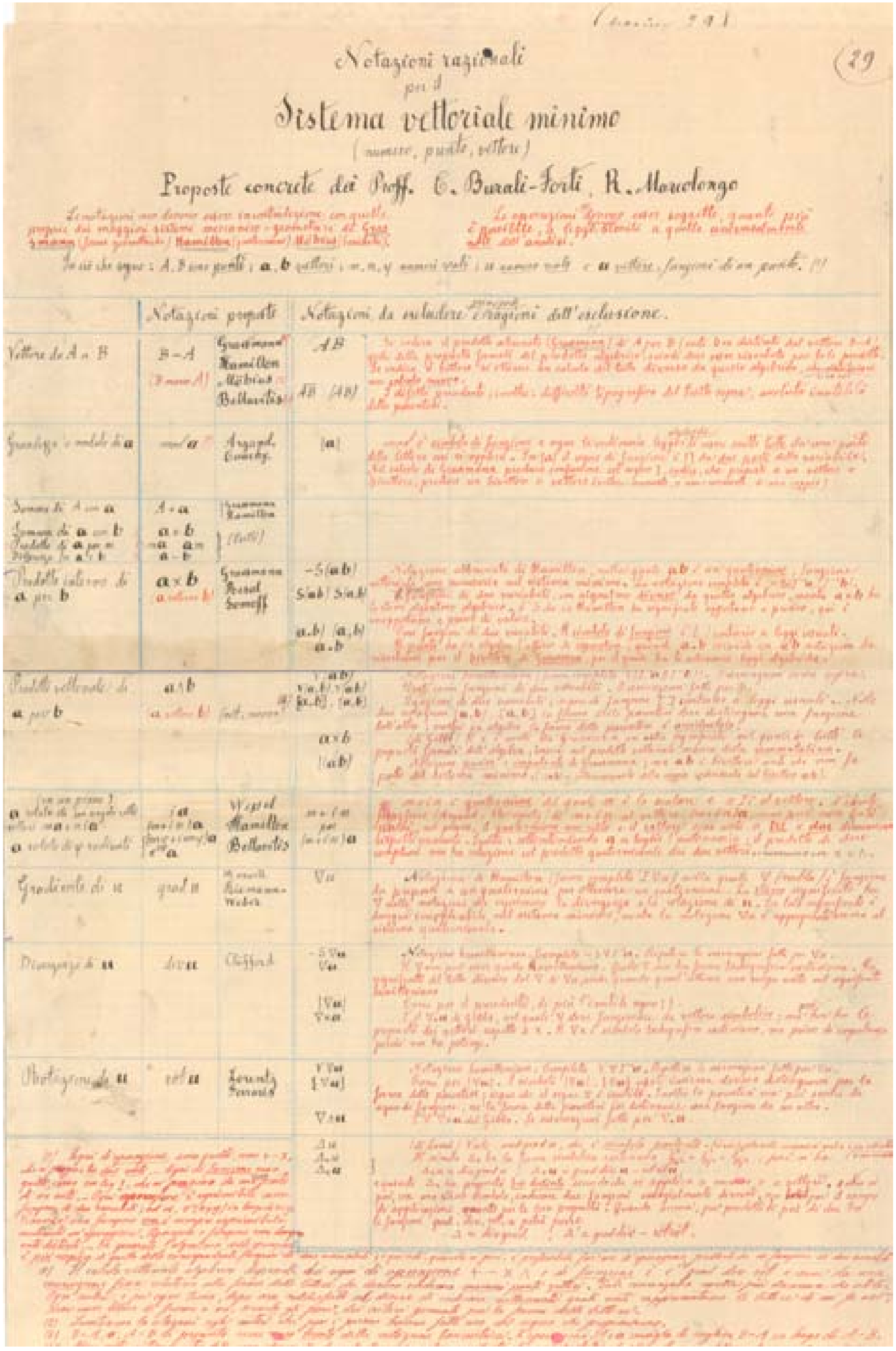
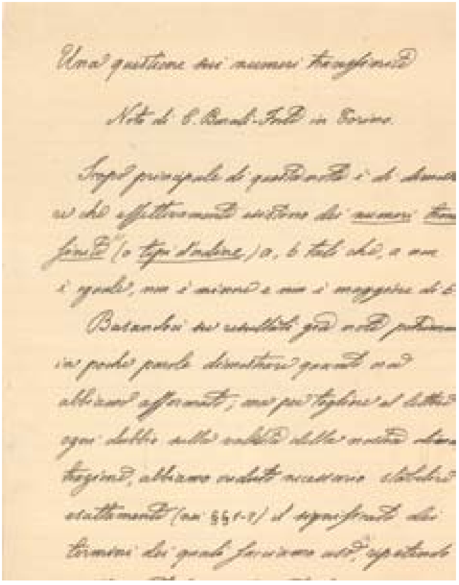
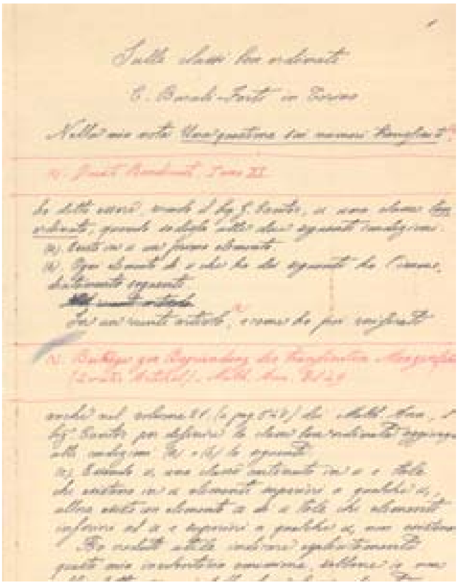

Notazioni razionali
per il
Sistema vettoriale minimo
(numero, punto, vettore)
Proposte concrete dei Proff. C. Burali-Forti R. Marcolongo

Figura 8.20: Proposte di notazioni per il sistema vettoriale minimo dei Proff. C. Burali-Forti e R. Marcolongo. Fonte: Archivio del Circolo Matematico di Palermo.


Una questione sui numeri transfiniti

Nota di C. Burali-Forti in Torino.

Figura 8.21: Prima pagina del manoscritto di C. Burali-Forti *Una questione sui numeri transfiniti.* Fonte: Archivio del Circolo Matematico di Palermo.


Sulle classi ben ordinate

C. Burali-Forti in Torino

Figura 8.22: Prima pagina del manoscritto di C. Burali-Forti *Sulle classi ben ordinate.* Fonte: Archivio del Circolo Matematico di Palermo.

Capitolo 9

Bibliografia

Elenco di archivi e biblioteche

- Archivio Storico della Città di Torino
- Archivio di Stato di Torino
- Archivio Storico dell'Università di Torino
- Archivio dell'Accademia delle Scienze di Torino
- Archivio dell'Ospedale Mauriziano di Torino
- Archivio della Confraternita dei Laici, Arezzo
- Archivio Storico del Comune di Arezzo
- Archivio di Stato, Arezzo
- Archivio di Stato, Pisa
- Archivio di Stato, Roma
- Archivio del Circolo Matematico di Palermo
- Biblioteca Speciale di Matematica «Giuseppe Peano», Dipartimento di Matematica, Università di Torino
- Biblioteca dell'Accademia dei Lincei, Roma
- Biblioteca Civica, Torino
- Biblioteca della Fondazione Luigi Firpo, Torino

- Biblioteca della Scuola di Applicazione e Arma, Torino
- Biblioteca Universitaria, Pisa
- Biblioteca Nazionale Universitaria, Torino
- Biblioteca del Dipartimento di Filosofia, Fondo G. Vailati, Università di Milano
- Biblioteca Città di Arezzo

9.1 Fonti-Bibliografia primaria

ARRIGHI, Gino, (a cura di), *Lettere a Mario Pieri (1884-1913). Quaderni P.RI.ST.EM. N.6. Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Milano, Bocconi, 1997.

BECQUEREL, Jean, *Le principe de relativité et la théorie de la gravitation*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

BOGGIO, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 58-62.

BOGGIO, Tommaso, «Geometria assoluta degli spazi curvi. (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V 28 (1) (1919), 169-174.

BOGGIO, Tommaso, «Sulla geometria assoluta degli spazi curvi», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 54 (1918-1919), 189-200.

BOTTAZZINI, Umberto, CONTE, Alberto & GARIO, Paola, (a cura di), *Riposte armonie. Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino, Bollati Boringhieri, 1996.

BURALI-FORTI, Cesare, *Sopra alcuni problemi di assicurazioni sulla vita*, Arezzo, Belletti, 1886.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sui sistemi di coniche», *Giornale di Matematiche (Battaglini)*, 24 (1886), 309-333.

BURALI-FORTI, Cesare, *Logica matematica*, Milano, Hoepli, 1894.

BURALI-FORTI, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 10 (1896), 177-195.

BURALI-FORTI, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 64-82.

BURALI-FORTI, Cesare, «Una questione sui numeri transfiniti», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 154-164.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle classi ben ordinate», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 11 (1897), 260.

BURALI-FORTI, Cesare, «Il metodo di Grassmann nella geometria proiettiva», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 15 (1901), 310-320.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sui principii della meccanica», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 22 (1906), 152-160.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcune operazioni proiettive applicabili nella meccanica», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1905-1906), 100-120.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sulle omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 42 (1907), 417-426.

BURALI-FORTI, Cesare, «Funzioni vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 43 (1907-1908), 13-24.

BURALI-FORTI, Cesare, «I quaternioni di Hamilton e il calcolo vettoriale», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 43 (1907-1908), 1146-1164.

BURALI-FORTI, Cesare, «L'importance des transformations linéaires des vecteurs dans le calcul vectoriel général», *L'Enseignement Mathématique*, 10 (1908), 411-417.

BURALI-FORTI, Cesare, «Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 50-55.

BURALI-FORTI, Cesare, «Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 18 (1909), 238-241.

BURALI-FORTI, Cesare, «Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 45 (1909-1910), 388-400.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra una formula generale per la trasformazione di integrali di omografie vettoriali», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 46 (1910-1911), 745-765.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 10-16.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 20 (1911), 641-648.

BURALI-FORTI, Cesare, «Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale assoluto», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 33 (1912), 1-40.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les dyads et les dyadics de Gibbs», *L'Enseignement Mathématique*, 14 (1912), 276-282.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sur les lois générales de l'algorithme des symboles de fonction et d'operation», *Proceedings of the fifth International Congress of Mathematicians, Cambridge 22-28 August 1912*, 2 (1913), 480-491.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcuni operatori lineari vettoriali», *Atti dell'Istituto Veneto*, 72 [8 15] (1913), 265-276.

BURALI-FORTI, Cesare, «Sopra alcune omografie determinate da formazioni geometriche di seconda specie», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 23 (2) (318-323), 1914.

Burali-Forti, Cesare, «Sulla definizione di coppie, terne, ecc.», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (1) (1916), 405-413.

Burali-Forti, Cesare, «Nuove applicazioni degli operatori», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 50 (1914-1915), 669-684.

Burali-Forti, Cesare, «Sulle derivate delle isomerie vettoriali», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (1) (1916), 709-716.

Burali-Forti, Cesare, «Sugli operatori differenziali omografici», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 25 (2) (1916), 51-59.

Burali-Forti, Cesare, «Equivalenti omografiche delle formule di Frenet. Linee e superficie parallele», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 52 (1916-1917), 834-846.

Burali-Forti, Cesare, «I moti relativi nel calcolo assoluto», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 26 (1) (1917), 596-602.

Burali-Forti, Cesare, «I moti relativi nel calcolo assoluto», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 26 (1) (1917), 632-637.

Burali-Forti, Cesare, «Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 53 (1917-1918), 347-358.

Burali-Forti, Cesare, *Logica matematica, Seconda edizione*, Milano, Hoepli, 1919.

Burali-Forti, Cesare, «Operatori per le iperomografie», *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 57 (1921-1922), 285-292.

Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota I)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 73-76.

Burali-Forti, Cesare, «Sugli spazi curvi (Nota II)», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (2) (1922), 181-184.

Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, *Meccanica razionale*, Torino, Lattes, 1921.

Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, «Moti relativi e pendolo di Foucault», *Rendiconti dell'Istituto Lombardo*, 55 (1922), 310-317.

Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*, Torino, STEN, 1924.

Burali-Forti, Cesare & Boggio, Tommaso, «Osservazioni sopra un articolo del Prof. P. Straneo», *Il Bollettino di Matematica*, 4 (1925), LXVII-LXVIII.

Burali-Forti, Cesare & Marcolongo, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 23 (1907), 324-328.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 65-80.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 24 (1907), 318-332.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Nuovo Cimento*, 5, 13 (1907), 488-493.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 25 (1908), 352-375.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Per l'unificazione delle notazioni vettoriali», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 26 (1908), 369-377.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Notations rationelles pour le système vectoriel minimum*, Turin, Bona, 1908.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*, Bologna, Zanichelli, 1909.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica-matematica*, Torino, Petrini, 1909.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Notations rationelles pour le système vectoriel minimum», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 41-45.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Réponse a Combebiac», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 134.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Réponse à Timerding et Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 459-466.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elements de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la geometrie, à la mecanique et à la physique-mathématique*, Paris, Hermann, 1910.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Réponse à Carvallo, Cargill-Knott e Macfarlane», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 46-54.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «A proposito dell'articolo di G. Aguglia: I quaternioni (I)», *Bollettino di Matematica*, 10 (1911), 192-194.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «À propos d'un article de M. E. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 13 (1911), 138-148.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «A proposito dell'articolo di G. Aguglia: I quaternioni (II)», *Bollettino di Matematica*, 11 (1912), 188-189.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analyse vectorielle générale: I, Transformations linéaires*, Pavia, Mattei, 1912.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analyse vectorielle générale: II, Applications à la mécanique et à la physique*, Pavia, Mattei, 1913.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, «Analyse vectorielle générale», *Isis*, 5, Tome II, Fasc. 1 (1914), 174-182.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria alla meccanica e alla fisica matematica. 2 ediz.*, Bologna, Zanichelli, 1921.

BURALI-FORTI, Cesare & MARCOLONGO, Roberto, *Analisi vettoriale generale e applicazioni.* Vol I*: Trasformazioni lineari, seconda edizione*, Bologna, Zanichelli, 1929.

BURGATTI, Pietro, BOGGIO, Tommaso & BURALI-FORTI, Cesare, *Analisi vettoriale generale e applicazioni. Vol II:. Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, 1930.

CARTAN, Élie, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

CARVALLO, Emmanuel, «Opinion de M. Carvallo (Paris)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 381.

CASSINA, Ugo, «Recensione: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *Il Bollettino di Matematica*, IV (1925), XXXVII-XLIV.

COMBEBIAC, Gaston Charles, «À propos d'un article de M. Burali-Forti sur le calcul vectoriel», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 46.

FINZI, Bruno & PASTORI, Maria, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, Zanichelli, 1949.

GIORGI, Giovanni, «Metodi di calcolo vettoriale e spaziale, notizie storiche e comparative», *In Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi a cura di Berzolari Luigi, Vivanti Giulio, Gigli Duilio*, 3 (1947), Milano, Hoepli, 99-124.

JAHNKE, Eugen, «Opinion de M. E. Jahnke (Berlin)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 381.

KLEIN, Felix, «Opinion de M. F. Klein (Goetingue)», *L'Enseignement*

Mathématique, 11 (1909), 211.

Knott, Cargill Gilston, «Remarques de M. Cargill-G Knott (Edimbourg)», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 39-45.

Macfarlane, Alexander, «Opinion de M. Alex. Macfarlane (Chatham, Canada)», *L'Enseignement Mathématique*, 12 (1910), 45-46.

Marcolongo, Roberto, «Les transformations de Lorentz et les équations de l'Électrodynamique», *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, IV (1912), 429-468.

Marcolongo, Roberto, *Relatività, seconda edizione*, Messina, Principato, 1923.

Marcolongo, Roberto, «La relatività ristretta, Parte I», *Scientia*, 35, CXLIV (1924), 249-258.

Marcolongo, Roberto, «La relatività ristretta, Parte II», *Scientia*, 35, CXLV (1924), 321-330.

Marcolongo, Roberto, «Necrologio di Cesare Burali-Forti», *Bollettino UMI*, 10 (1931), 181-185.

Marcolongo, Roberto, *Quaranta anni di insegnamento*, Napoli, S.I.E.M., 1935.

Nastasi, Pietro & Scimone, Aldo, (a cura di), *Lettere a Giovanni Vacca. Quaderni P.RI.ST.EM. N.5. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1995.

Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Calendario della corrispondenza di Tullio Levi-Civita. Quaderni P.RI.ST.EM. N.8. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 1999.

Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Aspetti scientifici e umani nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita. Quaderni P.RI.ST.EM. N.12. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2000.

Nastasi, Pietro & Tazzioli, Rossana, (a cura di), *Aspetti di Meccanica e di Meccanica Applicata nella corrispondenza di Tullio Levi-Civita (1873-1941). Quaderni P.RI.ST.EM. N.14. Per l'Archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Palermo, Bocconi, 2003.

Palatini, Attilio, «Deduzione invariantiva delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton», *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, XLIII (1918-1919), 203-212.

Levi-Civita, Tullio, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto. Raccolte e compilate dal Dott. Enrico Persico*, Roma, Stock, 1925.

Palladino, Franco, (a cura di), *Le corrispondenze epistolari tra Peano* *e Cesàro e Peano e Amodeo. Quaderni P.RI.ST.EM. N.13. Per l'archivio della corrispondenza dei matematici italiani*, Salerno, Bocconi, 2000.

PEANO, Giuseppe, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*, Torino, Bocca, 1888.

PEANO, Giuseppe, *Formulaire de Mathematiques, Formulario Mathematico (I-V ed.)*, Torino, Bocca, 1895-1908.

PEANO, Giuseppe, «Lettre de M. Peano (Turin)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 216-217.

PENSA, Angelo, «Geometria assoluta dei vettori ed omografie in un S_n euclideo», *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, (2) 52 (1919), 439-453.

PENSA, Angelo, «Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo. (Nota I)», *Atti del Reale Istituto Veneto*, LXXIX (1919-1920), 275-292.

PENSA, Angelo, «Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo. (Nota II)», *Atti del Reale Istituto Veneto*, LXXIX (1919-1920), 737-761.

RAINICH, George Yuri, «Reviews: *Espaces Courbes. Critique de la Relativité*», *The American Mathematical Monthly*, 33, 10 (1926), 515-517.

RICCI, Gregorio & LEVI-CIVITA, Tullio, «Métodes de calcul différentiel absolu et leurs applications», *Mathematische Annalen*, 54 (1901), 125-201.

SARTON, George, «Unification des notations vectorielles», *Isis*, 5, Tome II, Fasc. 1 (1914), 173-174.

SOMIGLIANA, Carlo, «Sulla trasformazione di Lorentz», *Atti dell'Accademia dei Lincei: Rendiconti*, V, 31 (1) (1922), 409-414.

STRANEO, Paolo, «Considerazioni generali sulle critiche della teoria della relatività», *Il Bollettino di Matematica*, (2) IV (1925), I-XII.

TIMERDING, Heinrich Emil, «Lettre de M. Timerding (Strasbourg)», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 129-134.

VAILATI, Giovanni, «Recensione: C. Burali-Forti, *Logica Matematica*», *Rivista di Matematica*, 4 (1894), 143-146.

WEYL, Hermann, *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig, Hirzel, 1928.

WILSON, Edwin Bidwell, «Lettre de M. Edw. B. Wilson», *L'Enseignement Mathématique*, 11 (1909), 211-216.

WILSON, Edwin Bidwell, «The unification of vectorial notations», *Bulletin of the American Mathemathical Society*, 8 (1910), 415-436.

9.2 Bibliografia secondaria

AGAZZI, Evandro, «Burali-Forti, Cesare», *Dizionario biografico degli italiani*, 15 (1972), 376-381.

BORGA, Marco, FREGUGLIA, Paolo & PALLADINO, Dario, *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano, Franco Angeli, 1985.

BOTTAZZINI, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Torino, UTET, 1998.

BRIGAGLIA, Aldo & MASOTTO, Guido, *Il Circolo Matematico di Palermo*, Bari, Dedalo, 1982.

CATTANI, Carlo, «Marcolongo e la volgarizzazione della relatività (1906-1924)», *Rivista di Storia della Scienza*, II, 4,(2) (1996), 99-144.

CATTANI, Carlo & DE MARIA, Michelangelo, «Conservation Laws and Gravitation Waves in General Relativity (1915-1918)», *The Attraction of Gravitation*, Basel, Birkhäuser (1993), 63-87.

CROWE, Michel J., *A History of Vector Analysis*, New York, Dover, 1993.

DE MARIA, Michelangelo, «Le prime reazioni alla relatività generale in Italia: la polemiche fra M. Abraham e A. Einstein», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 143-160.

DELL'AGLIO, Luca, «On the genesis of the concept of covariant differetiation», *Revue d'histoire des mathématiques*, 2 (1996), 215-264.

DELL'AGLIO, Luca, «Sul concetto di tensore in Ricci-Curbastro», *Bollettino di Storia della Scienze Matematiche*, XVII, 1 (1997), 13-49.

DELL'AGLIO, Luca, «On the 'semi-empirical' nature of Absolute Differential Calculus», *Archives Internationales d'Histoires des Sciences*, 51 (2001), 108-142.

DELL'AGLIO, Luca, «Un *case study* nell'accettazione di teorie matematiche. Sviluppo e diffusione del calcolo differenziale assoluto in epoca prerelativistica», *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 24 (2) (2004), 9-65.

DI SIENO, Simonetta, GUERRAGGIO, Angelo & NASTASI, Pietro, *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, 1998.

FREGUGLIA, Paolo, «Cesare Burali-Forti e gli studi sul calcolo geometrico», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 173-180.

FREGUGLIA, Paolo, *Dalle equipollenze ai sistemi lineari. Il contribuo ita-*

liano al calcolo geometrico, Urbino, Quattroventi, 1992.

FREGUGLIA, Paolo, *Geometria e numeri. Storia, teoria elementare e applicazioni del calcolo geometrico*, Torindso, Bollati Boringhieri, 2006.

GATTO, Romano, *Storia di una "anomalia". Le Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli tra l'Unità d'Italia e la riforma Gentile 1860-1923*, Napoli, Fredericiana Editrice Universitaria, 2000.

GIACARDI, Livia & ROERO, Clara Silvia, *Bibliotheca Mathematica. Documenti per la storia della matematica nelle biblioteche torinesi*, Torino, Allemandi, 1987.

GIACARDI, Livia, «Matematica e Humanitas scientifica. Il Progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati», *Bollettino UMI*, Sez. A (2001), 317-352.

GIANNETTO, Enrico Antonio, «Le trasformazioni di Lorentz-Poincaré-Marcolongo», *Atti del LXXXV Congresso Nazionale di SIF, Pavia*, in corso di stampa (1999), s.p.

GUERRAGGIO, Angelo & NASTASI, Pietro, *Gentile e i matematici italiani. Lettere 1907-1943*, Torino, Boringhieri, 1993.

GUERRAGGIO, Angelo & NASTASI, Pietro, *Matematica in camicia nera. Il regime e gli scienziati*, Milano, Paravia, 2005.

ISRAEL, Giorgio & NASTASI, Pietro, *Scienza e razza nell'Italia fascista*, Bologna, Il Mulino, 1998.

KENNEDY, Hubert, «Cesare Burali-Forti», *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's (1970), 593-594.

KENNEDY, Hubert, *Peano. Life and Works of Giuseppe Peano. Definitive Edition*, Concord, Peremptory Publications, 2006.

LANARO, Giorgio, (a cura di), *Giovanni Vailati. Epistolario 1891-1909*, Torino, Einaudi, 1971.

LOLLI, Gabriele, «I critici italiani di Peano: Beppo Levi e Federigo Enriques», In *Atti del Convegno Peano e i fondamenti della matematica,* 1991, Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti, Modena, Mucchi (1993), 51-71.

LUCIANO, Erika & ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *Giuseppe Peano - Louis Couturat. Carteggio (1896-1914)*, Firenze, Olschki, 2005.

LUCIANO, Erika, «Aritmetica e storia nei libri di testo della Scuola di Peano», *Da Casati a Gentile, Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia.* A cura di Livia Giacardi, Livorno, Agorà (2006), 269-303.

MAIOCCHI, Roberto, *Einstein in Italia. La scienza e la filosofia italiane* *di fronte alla teoria della relatività*, Milano, Franco Angeli, 1985.

MAIOCCHI, Roberto, «Matematici italiani di fronte alla relatività», *La matematica italiana tra le due guerre mondiali, Milano-Gargnano del Garda, 8-11 ottobre 1986*, Bologna, Pitagora (1986), 247-264.

MALTESE, Giulio, «The late entrance of relativity into Italian scientific community (1906-1930)», *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences*, 31:1 (2000), 125-173.

MARAZZINI, Paolo, *Nuove radiazioni, quanti e relatività in Italia 1896-1925*, Pavia, La Goliardica, 1996.

MASSAINI, Alessia, *Un musicista aretino: Cosimo Burali-Forti (1834-1905). Studio critico e catalogo tematico,* Tesi di laurea: relatore Piperno Franco, Università di Firenze, Facoltà di Lettere e Filosofia, 1998/1999.

NASTASI, Pietro, «Aspetti della vita romana (1919-1941) di Tullio Levi-Civita», *Rivista di Storia della Scienza*, (II), 4 (1) (1996), 81-142.

PARRA, Josep Manel & SALLENT, Emma, «Covariància i invariància a l'*Espaces Courbes* de Cesare Burali-Forti i Tommaso Boggio», *Actes de la VI Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT (2002), 437-442.

PARRA, Josep Manel & SALLENT, Emma, «El debat sobre les notacions vectorials al congrés internacional dels matemàtics de Roma (1908) i a l'*L'Enseignement Mathématique* (1908-1912)», *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT (2003), 233-238.

PASTRONE, Franco, «Fisica matematica e meccanica razionale». In: DI SIENO, Simonetta, GUERRAGGIO, Angelo, & NASTASI, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 381-504.

PIZZOCCHERO, Livio, «Geometria differenziale». In: DI SIENO, Simonetta, GUERRAGGIO, Angelo, & NASTASI, Pietro, (a cura di), *La matematica italiana dopo l'Unità. Gli anni tra le due guerre mondiali*, Milano, Marcos y Marcos, (1998), 321-379.

PRATESI, Gabriele, *Il calcolo geometrico di Peano e il vettoriale assoluto 'senza coordinate' di Burali-Forti e Marcolongo: contributi alla teoria della relatività speciale,* tesi di laurea: relatore Giannetto Enrico Antonio, correlatore: Giudice Franco, Università degli studi di Pavia, Dipartimento di Fisica, 1999.

ROERO, Clara Silvia, (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1898. Tomo primo. Ricerca, Insegnamento, Collezioni scientifiche*, Torino, Centro di Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti X, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999.

Roero, Clara Silvia, (a cura di), *La Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche Naturali di Torino 1848-1898. Tomo secondo. I docenti*, Torino, Centro di Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti IX, Torino, Deputazione Subalpina di Storia Patria, 1999.

Roero, Clara Silvia, (a cura di), *Giuseppe Peano Matematica, Cultura e Società*, Cuneo, L'Artistica Savigliano, 2001.

Roero, Clara Silvia, Nervo, Natalia & Armano, Tiziana, (a cura di), *L'Archivio Giuseppe Peano*, Torino, CD-ROM N. 2, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2002.

Roero, Clara Silvia, (a cura di), *L'Opera omnia di Giuseppe Peano*, CD-ROM N. 3, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2002.

Roero, Clara Silvia, (a cura di), *Le Riviste di Giuseppe Peano*, CD-ROM N. 4, Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 2003.

Sallent, Emma & Parra, Josep Manel, «Cesare Burali-Forti i les homografies vectorials», *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT (2003), 239-244.

Schmid, Anne-Françoise, (a cura di), *Bertrand Russell. Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913). Tome I*, Paris, Kimé, 2001.

Schmid, Anne-Françoise, (a cura di), *Bertrand Russell. Correspondance sur la philosophie, la logique et la politique avec Louis Couturat (1897-1913). Tome II*, Paris, Kimé, 2001.

Terlizzi, Giulia, «Fondi Archivistici. Roberto Marcolongo: un fondo di lettere e manoscritti», *Rivista di Storia della Scienza*, 1 (1993), 227-233.